Polynomische Entwicklungen von Funktionen einer komplexen Variabeln.

INAUGURAL-DISSERTATION

zur Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt der Hohen Philosophischen Fakultät der Universität Basel

von

KONRAD RIEDER

aus Basel.

Mit 8 Figuren.

BASEL

Buchdruckerei Emil Birkhäuser

1911.

Polynomische Entwicklungen von Funktionen einer komplexen Variabeln.

INAUGURAL-DISSERTATION

zur Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt der Hohen Philosophischen Fakultät der Universität Basel

von

KONRAD RIEDER

aus Basel.

A.C.D.
LUGDBAT.
BIBL.

Mit 8 Figuren.

BASEL

Buchdruckerei Emil Birkhäuser

1911.

Genehmigt von der mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung der philosophischen Fakultät auf Antrag der Herren Professoren Dr. Fueter und Spiess.

Basel, den 14. Juni 1911.

Rud. Fueter
Prodekan.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einleitung . . . . . 5—8

Kapitel I. Beweis für die Existenz von polynomischen Entwicklungen einer analytischen Funktion für ein beliebiges einfach zusammenhängendes Gebiet, das ganz im Endlichen liegt.

§ 1. Existenzbeweis von C. Runge . . . . . 9—17

§ 2. Existenzbeweis von D. Hilbert . . . . . 17—23

§ 3. Existenzbeweis von Mittag-Leffler für den Stern . 23—32

Kapitel II. Spezielle polynomische Entwicklungen für ein beliebiges einfach zusammenhängendes Gebiet, das von einem einzigen glatten Linienzug begrenzt wird und das ganz im Endlichen liegt.

§ 4. Ueber die Arbeit von G. Faber; spezielle polynomische Reihen . . . . . 32—49

§ 5. Ueber die Arbeit von G. Faber; Zusammenhang mit der Entwicklung nach Kugelfunktionen . . 49—57

Kapitel III. Polynomische Entwicklungen für speziell gewählte Gebiete, nämlich das Innere von Ellipsen und Cassini'schen Kurven, mit Berücksichtigung der Berechnung der Koëffizienten.

§ 6. Polynomische Entwicklungen für das Innere von Ellipsen nach E. Picard . . . . . 57—66

§ 7. Polynomische Entwicklungen von geraden und ungeraden Funktionen für das Innere von Cassinischen Kurven . . . . . 66—76

§ 8. Polynomische Entwicklung von beliebigen Funktionen in dem einen Blatt einer Lemniskate . . 76—85

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546707_0038

Einleitung.

Der vorliegende Aufsatz beschäftigt sich mit unendlichen Reihen, deren sämtliche Glieder *ganze rationale Funktionen* der komplexen Variabeln $z = x + iy$ sind, und die innerhalb eines gewissen Gebietes der Gauss'schen Ebene gleichmässig gegen eine daselbst reguläre analytische Funktion $F(z)$ konvergieren, somit die Funktion $F(z)$ in diesem Gebiete darstellen; solche Reihen werden als *polynomische Reihen* bezeichnet. Zunächst will ich die Bedeutung einiger häufig vorkommenderBegriffe feststellen. Ich sage von einer Funktion $F(z)$ sie sei in einem Punkte a der Gauss'schen Ebene analytisch, wenn ihr Realteil $u(xy)$ und ihr Imaginärteil $v(xy)$ den Bedingungen genügen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ und } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

oder was auf dasselbe herauskommt, wenn $\frac{dF(z)}{dz}$ in diesem Punkte a einen einzigen bestimmten Wert hat; die Funktion $F(z)$ ist in einem Gebiet analytisch, wenn sie in jedem Punkte dieses Gebietes analytisch ist. Die analytische Funktion $F(z)$ verhält sich im Punkte $z = a$ regulär, wenn $F(z)$ endlich und stetig ist in einer gewissen Umgebung des Punktes a. Die Gesamtheit aller Punkte, für die sich die Funktion $F(z)$ regulär und analytisch verhält, bildet den Bereich der Funktion $F(z)$.

In der Theorie der polynomischen Entwicklungen handelt es sich zunächst um die Frage, ob eine polynomische Darstellung für eine analytische Funktion in einem beliebigen Gebiet ihres Bereiches überhaupt möglich ist. Man erkennt sofort, dass jedenfalls der Punkt $z = \infty$ nicht in diesem Gebiet liegen darf, da in diesem Punkt jedes einzelne Glied der Entwicklung unendlich wird. Diese Frage nach der Existenz von polynomischen Entwicklungen wurde

in verschiedener Weise in Angriff genommen und gelöst. Die Existenz polynomischer Reihen, die eine gegebene analytische Funktion innerhalb eines einfach zusammenhängenden endlichen Gebietes, das im Innern des Bereiches der Funktion liegt, darstellen, hat zuerst C. Runge [1]) (1885) nachgewiesen; in derselben Allgemeinheit löste später (1897) D. Hilbert [2]) dasselbe Problem. Für ein speziell gewähltes Gebiet, den Stern, löste Mittag-Leffler [3]) die Aufgabe (1900); dieser sog. Mittag-Leffler'sche Stern mit dem Zentrum $z = a$ für die analytische Funktion $F(z)$ ist derjenige Teil der Gauss'schen Ebene, der übrig bleibt, wenn man vom Punkte a aus nach sämtlichen singulären Punkten der Funktion $F(z)$ Strahlen zieht und diejenigen Teile dieser Strahlen, die zwischen den singulären Punkten und dem Punkte $z = \infty$ liegen, ausschliesst.

Die in den erwähnten Arbeiten niedergelegten Methoden, die die Möglichkeit der polynomischen Entwicklung für den ganzen Bereich einer analytischen Funktion oder wenigstens für einen grossen Teil des Bereiches, den Stern, endgültig beweisen, gestatten im allgemeinen nicht die Entwicklungen einer beliebigen Funktion näher zu bestimmen. Es liegt deshalb nahe, zunächst solche polynomische Darstellungen zu suchen, die nur innerhalb speziell gewählter Gebiete konvergieren. Eine solche Spezialisierung des Problems lässt erwarten, dass die Aufstellung der Polynome und der Koëffizienten der Entwicklung eher allgemein durchführbar ist. In dieser Beziehung hat sich G. Faber [4]) die Aufgabe gestellt, diejenigen polynomischen Entwicklungen aufzustellen, die in einem beliebigen endlichen und einfach zusammenhängenden Gebiet, das von einem einzigen glatten Linienzug begrenzt wird, eine beliebige daselbst reguläre analytische Funktion $F(z)$ darstellen und die vollkommen analog sind der Potenzreihenentwicklung von analytischen Funktionen. Ist nämlich z_0 ein singulärer Punkt von $F(z)$ und verhält sich $F(z)$ im Innern des Kreises mit dem Zentrum $z = a$,

---

[1]) Acta mathematica, Band 6 (1885). „Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen."

[2]) Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathem.-physikal. Klasse 1897.

[3]) Acta mathematica, 23 (1900). „Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène." (Première note).

[4]) Mathematische Annalen, Band 57. „Über polynomische Entwicklungen, I."

der durch den Punkt z_0 geht, regulär und analytisch, dann lässt sich bekanntlich $F(z)$ durch die folgende Potenzreihe darstellen

$$F(z) = F(a) + \frac{F'(a)}{1!}(z-a) + \frac{F''(a)}{2!}(z-a)^2 + \frac{F'''(a)}{3!}(z-a)^3 + \cdots,$$

welche für alle z, die der Bedingung

$$|z-a| < |z_0 - a|$$

genügen, also in allen Punkten im Innern des erwähnten Kreises, gleichmässig gegen $F(z)$ konvergiert, und welche in jedem Punkte ausserhalb dieses Kreises divergiert. Man denke sich nun durch den Punkt z_0 eine beliebige im Endlichen verlaufende und doppelpunktslose Kurve, die aus einem einzigen glatten Linienzug C besteht, gezogen. Für den Fall, dass $F(z)$ innerhalb dieser Kurve C keine singulären Punkte besitzt, gibt Faber in seiner Abhandlung eine polynomische Entwicklung an für die sonst willkürliche Funktion $F(z)$, die innerhalb der Kurve C gleichmässig gegen $F(z)$ konvergiert, dagegen in jedem Punkte ausserhalb der Kurve C divergiert. Diese Entwicklung hat die Form

$$F(z) = a_0 + a_1 \cdot P_1(z) + a_2 \cdot P_2(z) + a_3 \cdot P_3(z) + \cdots,$$

wo die $P_1, P_2, P_3, \ldots$ Polynome in z sind, deren Grad durch den Index angegeben wird, und wo die $a_1\, a_2\, a_3 \ldots$ konstante Grössen sind, die noch von der Funktion $F(z)$ abhängen. Diese polynomischen Entwicklungen schliessen die Potenzreihenentwicklung als Spezialfall ein und zeigen deshalb in mancher Beziehung ähnliches Verhalten wie die Potenzreihen.

Eine grosse Zahl von Abhandlungen, die Fragen aus dem Gebiete der polynomischen Darstellungen behandeln, findet man in dem reichhaltigen Literaturverzeichnis am Schlusse des Lehrbuches von G. Vivanti [1]) zitiert, auf welches hier verwiesen sei.

Die vorliegende Arbeit zerfällt in drei Kapitel. Im ersten Kapitel wird über Arbeiten von C. Runge, D. Hilbert und Mittag-Leffler referiert. In § 3 dieses Kapitels wird die Konstruktion der vom Mittag-Leffler'schen Stern abgeleiteten Sterne durchgeführt, die sich verhältnismässig einfach für die Ableitung der Mittag-Leffler'schen Entwicklung verwenden lassen.

[1]) G. Vivanti, Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen. Deutsch von A. Gutzmer, Leipzig 1906.

Das ganze zweite Kapitel handelt von der Arbeit von G. Faber, in welcher spezielle Polynomenfolgen aufgestellt und untersucht werden. In § 4 werden diese polynomischen Reihen abgeleitet und die weitgehende Analogie zwischen diesen Reihen und den Potenzreihen gezeigt. In § 5 wird der Gedankengang skizziert, den Faber benützt zur Gewinnung allgemeinerer Polynomenfolgen, aus denen sich als Spezialfall die Entwicklungen nach Kugelfunktionen ergeben.

Das dritte Kapitel handelt von der Frage nach der Berechnung der Koëffizienten der Entwicklung. In § 6 wird das Verfahren von E. Picard[1]) für die Aufstellung der polynomischen Reihe für die Ellipse näher ausgeführt, wobei die Abbildungsfunktion $w = z + \sqrt{z^2 - 1}$ in geometrisch anschaulicher Weise diskutiert wird. Am Schlusse dieses Paragraphen folgt noch eine allgemeine Bemerkung über die Berechnung der Koëffizienten. § 7 bringt polynomische Entwicklungen von geraden und ungeraden Funktionen, die im Innern von Cassini'schen Kurven mit den festen Punkten ± 1 konvergieren und stellt die Koëffizienten als Differenzialquotienten einer Funktion dar, die aus der darzustellenden Funktion durch eine Substitution gewonnen wird. In § 8 wird eine polynomische Darstellung für eine beliebige Funktion entwickelt, die im Innern des rechten Teiles einer Cassinischen Kurve

$$[(x-1)^2 + y^2]\,[(x+1)^2 + y^2] = konst. \leqq 1$$

gültig ist und die Veranlassung zur Bildung einer polynomischen Reihe gibt, die in n speziell einfach gewählten und getrennt liegenden Gebieten n verschiedene Funktionen darstellt. In der Schlussbemerkung wird noch auf die Analogie einer Reihe, die nach ganzen und gebrochenen rationalen Funktionen fortschreitet und in einem ringförmigen Gebiet konvergiert, mit der Laurent'schen Reihe hingewiesen.

---

[1]) E. Picard, Traité d'analyse, t. II.

Kapitel I.

Beweis für die Existenz von polynomischen Entwicklungen einer analytischen Funktion für ein beliebiges einfach zusammenhängendes Gebiet, das ganz im Endlichen liegt.

§ 1.

Existenzbeweis von C. Runge.

C. Runge war der erste, der den folgenden Satz bewiesen hat[1]: Jede eindeutige analytische Funktion $F(z)$ einer komplexen Variabeln z kann innerhalb ihres Bereiches stets in eine unendliche Reihe entwickelt werden, deren sämtliche Glieder rationale Funktionen von z sind und die für jedes Gebiet innerhalb des Bereiches gleichmässig konvergiert. Ist der Bereich einfach zusammenhängend, und schliesst man den Punkt $z = \infty$ aus, derart, dass der einfache Zusammenhang erhalten bleibt, so lässt sich die Funktion $F(z)$ in dem so erhaltenen Gebiete S in eine Reihe entwickeln, die nach ganzen rationalen Funktionen von z fortschreitet.

Der Beweis dieser speziellen Fassung des Satzes soll hier kurz entwickelt werden.

Zunächst konstruiert Runge ein System von unendlich vielen ineinander geschachtelten Gebieten und zwar in folgender Art. Man denke sich ein Quadrat mit den Eckpunkten

$$2^n \cdot \frac{1+i}{2},\ 2^n \cdot \frac{1-i}{2},\ 2^n \cdot \frac{-1-i}{2},\ 2^n \cdot \frac{-1+i}{2},$$

und dieses Quadrat, dessen Seitenlänge 2^n ist, werde durch Parallelen zu den Seiten in kleinere Quadrate zerlegt, so dass der Abstand zweier benachbarter Parallelen $\frac{1}{2^n}$ beträgt. Dadurch wird

[1]) In der Einleitung zitiert, pag. 6, Note 1.

das grosse Quadrat von jeder Parallelenschar in 2^{2n} gleich dicke Streifen zerlegt, und somit in 2^{4n} gleich grosse Quadrate. Betrachtet man irgend eines dieser kleinen Quadrate, das nicht an eine der vier Seiten des grossen Quadrates stösst, so ist es stets umgeben von acht kleineren Quadraten. Wir zählen das fixierte Quadrat zum Gebiete S_n, wenn es mit allen seinen acht umliegenden Quadraten im Gebiete S liegt; die Gesamtheit der Quadrate, die diese Eigenschaft besitzen, bilden das Gebiet S_n. Es kann nun der Fall eintreten, dass für niedere Zahlenwerte n das Gebiet S_n keine Bedeutung hat; konstruiert man z. B. das Gebiet S_1, das zur Funktion $\frac{1}{z}$ gehört, so hat S_1 keine Bedeutung, wohl aber S_2 und alle folgenden. Man kann aber einsehen, dass für jedes beliebige Gebiet S einmal eine Zahl m kommen muss, so dass alle Gebiete S_m, S_{m+1}, S_{m+2}, . . . einen bestimmten Sinn haben. Auf Grund der Definition von S_n erkennt man folgende wichtige Eigenschaft: Jedes Gebiet S_n $(n-m, m+1, m+2, \ldots)$ ist in S enthalten und schliesst das Gebiet S_{n-1} ein und ist im Gebiete S_{n+1} vollständig enthalten, derart, dass die Randkurven der drei Gebiete keinen Punkt gemeinsam haben; ist z ein beliebiger Punkt innerhalb S, so lässt sich stets eine Zahl p so gross bestimmen, dass jedes der Gebiete S_p, S_{p+1}, S_{p+2}, . . . den Punkt z einschliesst, oder kürzer ausgedrückt: es ist

$$\lim_{n=\infty} S_n = S$$

Der nächste Schritt, den Runge macht, besteht darin, dass er eine rationale Funktion $r_n(z)$ bildet, die in jedem Punkte z des Gebietes S_{n-1} von $F(z)$ dem absoluten Betrage nach um weniger als $\frac{1}{n}$ abweicht, so dass die Ungleichung besteht

$$|F(z) - r_n(z)| < \frac{1}{n},$$

und deren absoluter Betrag für alle Punkte z ausserhalb S_{n+1} kleiner als $\frac{1}{n}$ ist, so dass also

$$|r_n(z)| < \frac{1}{n}.$$

Zu dem Zwecke stellt man die Funktion $F(z)$ im Innern von S_n durch die Cauchy'sche Integralformel dar; bezeichnet man mit C_n die Randkurve des Gebietes S_n, so ist

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{F(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

Nun wähle man auf der Kurve C_n λ Punkte; durchläuft man die Kurve im positiven Sinn, so mögen die Punkte der Reihe nach heissen

$$\xi_{1,\lambda},\ \xi_{2,\lambda},\ \xi_{3,\lambda},\ \cdots\ \xi_{\mu,\lambda},\ \cdots\ \xi_{\lambda,\lambda}.$$

Es wird verlangt, dass wenn die Anzahl λ zunimmt, sich diese Punkte auf der Kurve C_n stets so verteilen, dass jeder Abstand je zweier aufeinanderfolgender Punkte, also jede der Grössen

$$\left|\xi_{1,\lambda} - \xi_{\lambda,\lambda}\right|,\ \left|\xi_{2,\lambda} - \xi_{1,\lambda}\right|, \cdots \left|\xi_{\mu,\lambda} - \xi_{\mu-1,\lambda}\right|, \cdots \left|\xi_{\lambda,\lambda} - \xi_{\lambda-1,\lambda}\right|$$

sich verkleinert, und zwar in der Weise, dass man zu jeder positiven beliebig kleinen Zahl δ stets eine so grosse Anzahl von Punkten angeben kann, etwa λ_1, dass für diese λ_1 Punkte der Abstand je zweier benachbarter kleiner als δ ist, oder dass also

$$\left|\xi_{1,\lambda_1} - \xi_{\lambda_1,\lambda_1}\right| < \delta,\ \left|\xi_{2,\lambda_1} - \xi_{1,\lambda_1}\right| < \delta, \cdots \left|\xi_{\mu,\lambda_1} \quad \xi_{\mu-1,\lambda_1}\right| < \delta, \cdots$$
$$\left|\xi_{\lambda_1,\lambda_1} - \xi_{\lambda_1-1,\lambda_1}\right| < \delta.$$

Das komplexe Integral kann nun definiert werden durch die Gleichung

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{F(\xi)}{\xi - z} d\xi = \lim_{\lambda = \infty} \frac{1}{2\pi i} \sum_{1}^{\lambda \mu} \frac{F(\xi_{\mu,\lambda})}{\xi_{\mu,\lambda} - z} (\xi_{\mu,\lambda} - \xi_{\mu-1,\lambda}).$$

Setzt man zur Abkürzung

$$R_\lambda(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{1}^{\lambda \mu} \frac{F(\xi_{\mu,\lambda})}{\xi_{\mu,\lambda} - z} (\xi_{\mu,\lambda} - \xi_{\mu-1,\lambda})$$

so erkennt man in $R_\lambda(z)$ eine rationale Funktion, die an den Stellen $\xi_{1,\lambda},\ \xi_{2,\lambda}, \ldots \xi_{\lambda,\lambda}$ lauter einfache Pole besitzt. Wir können nun unser Integral in der folgenden Form schreiben

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{F(\xi)}{\xi - z}\,d\xi = \lim_{\lambda=\infty} R_\lambda(z).$$

Es wird sich jetzt darum handeln, zu zeigen, dass dieser $\lim_{\lambda-\infty} R_\lambda(z)$ gleichmässig gegen den Wert des Integrals linkerhand konvergiert für alle z innerhalb C_{n-1} und ausserhalb C_{n+1}. Dieses Integral kann man offenbar zerlegen in eine endliche Summe von Integralen erstreckt je über einen der Teilwege $[\xi_{1,\lambda}, \xi_{2,\lambda}]$, $[\xi_{2,\lambda}, \xi_{3,\lambda}]$, ... $[\xi_{\lambda,\lambda}, \xi_{1,\lambda}]$; dann bekommt man die folgende Summe

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{F(\xi)}{\xi - z}\,d\xi = \frac{1}{2\pi i}\sum_{1}^{\lambda}{}_{\mu}\int_{\xi_{\mu-1,\lambda}}^{\xi_{\mu,\lambda}}\frac{F(\xi)}{\xi - z}\,d\xi.$$

Auch $R_\lambda(z)$ lässt sich durch eine ähnliche Summe darstellen, denn, da das komplexe Integral nur vom Funktionswert im Anfangs- und Endpunkt des Integrationsweges abhängt, so ist

$$\int_{\xi_{\mu-1,\lambda}}^{\xi_{\mu,\lambda}} d\xi = \xi_{\mu,\lambda} - \xi_{\mu-1,\lambda}$$

und man kann somit jedes einzelne Glied von $R_\lambda(z)$ durch ein bestimmtes Integral ausdrücken, nämlich

$$\frac{F(\xi_{\mu,\lambda})}{\xi_{\mu,\lambda} - z}\,(\xi_{\mu,\lambda} - \xi_{\mu-1,\lambda}) = \int_{\xi_{\mu-1,\lambda}}^{\xi_{\mu,\lambda}}\frac{F(\xi_{\mu,\lambda})}{\xi_{\mu,\lambda} - z}\,d\xi$$

und deshalb lässt sich $R_\lambda(z)$ durch folgende Summe darstellen

$$R_\lambda(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{1}^{\lambda}{}_{\mu}\int_{\xi_{\mu-1,\lambda}}^{\xi_{\mu,\lambda}}\frac{F(\xi_{\mu,\lambda})}{\xi_{\mu,\lambda} - z}\,d\xi;$$

indem man die Differenz bildet $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{F(\xi)}{\xi - z}\,d\xi - R_\lambda(z)$ und rechter-

hand je zwei entsprechende Integrale zusammenfasst, so erhält man

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{F(\xi)}{\xi - z}\,d\xi \qquad R_\lambda(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{1}^{\lambda}{}^{\mu}\int_{\xi_{\mu-1,\lambda}}^{\xi_{\mu,\lambda}}\left[\frac{F(\xi)}{\xi - z} - \frac{F(\xi_{\mu,\lambda})}{\xi_{\mu,\lambda} - z}\right]d\xi.$$

Fixieren wir nun das Integral

$$\int_{\xi_{\mu-1,\lambda}}^{\xi_{\mu,\lambda}}\left[\frac{F(\xi)}{\xi - z} - \frac{F(\xi_{\mu,\lambda})}{\xi_{\mu,\lambda} - z}\right]d\xi;$$

hier durchläuft ξ offenbar die Punkte des Teilweges $[\xi_{\mu-1,\lambda}, \xi_{\mu,\lambda}]$. Es bedeute ε eine beliebig kleine positive Grösse und z_0 einen beliebigen Punkt innerhalb C_{n-1} oder ausserhalb C_{n+1}; kann man nun für irgend einen Punkt $\bar{\xi}$ des Teilweges $[\bar{\xi}_{\mu-1,\lambda}, \bar{\xi}_{\mu,\lambda}]$ und alle z einer Umgebung (ϱ) von z_0 zu jedem beliebig kleinen vorgeschriebenen ε die Anzahl λ der auf C_n fixierten Punkte stets so gross wählen, etwa gleich λ_1, dass die Ungleichung

$$\left|\frac{F(\xi)}{\xi - z} - \frac{F(\xi_{\mu,\lambda})}{\xi_{\mu,\lambda} - z}\right| < \varepsilon \qquad (\alpha.)$$

erfüllt ist, so ist auch die folgende Ungleichung erfüllt

$$\left|\int_{\xi_{\mu-1,\lambda}}^{\xi_{\mu,\lambda}}\left[\frac{F(\xi)}{\xi - z} - \frac{F(\xi_{\mu,\lambda})}{\xi_{\mu,\lambda} - z}\right]d\xi\right| < \varepsilon\int_{\xi_{\mu-1,\lambda}}^{\xi_{\mu,\lambda}}|\,d\xi\,| = \varepsilon\cdot l_\mu,$$

wenn man mit l_μ die Länge des Teilweges $[\xi_{\mu-1,\lambda}, \bar{\xi}_{\mu,\lambda}]$ bezeichnet. Als Abschätzung für die fragliche Differenz erhält man also

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{F(\xi)}{\xi - z}\,d\xi - R_\lambda(z)\right| \leqq \frac{\varepsilon\cdot l}{2\pi},$$

falls man unter l die Länge der Kurve C_n versteht; damit wäre dann auch die gleichmässige Konvergenz von $R_\lambda(z)$ bewiesen.

Um die vorhin gemachte Annahme $(\alpha.)$ zu beweisen, betrachte man den Ausdruck

$$\frac{F(\xi)}{\xi - z},$$

wo ξ ein variabler Punkt nicht nur auf C_n, sondern in dem streifenförmigen Gebiet zwischen den Kurven C_{n-1} und C_{n+1} ist, und z in der Umgebung (ϱ) von z_0 liegt. Der Ausdruck verhält sich in diesem streifenförmigen Gebiet regulär; denn dieses Gebiet liegt innerhalb S, so dass also $F(\xi)$ regulär ist, und ϱ kann stets so klein gewählt werden, dass die Umgebung (ϱ) von z_0 entweder ganz innerhalb C_{n-1} oder ganz ausserhalb C_{n+1} liegt, so dass der Nenner $(\xi - z)$ nicht verschwinden kann. Da die Kurve C_n ganz im Innern dieses streifenförmigen Gebietes verläuft, so lässt sich $\frac{F(\xi)}{\xi - z}$ in einer Umgebung jeden Punktes ξ^* der Kurve C_n in eine Potenzreihe entwickeln

$$\frac{F(\xi)}{\xi - z} = \frac{F(\xi^*)}{\xi^* - z} + a_1(\xi - \xi^*) + a_2(\xi - \xi^*)^2 + \cdots;$$

der Konvergenzradius R dieser Reihe kann für keinen Punkt ξ^* verschwinden, sondern wird ein von Null verschiedenes, positives Minimum h haben, da die Kurven C_{n-1} und C_{n+1} keinen Punkt gemeinsam haben. Bezeichnet man mit G das Maximum des absoluten Betrages von $\frac{F(\xi)}{\xi - z}$ im Innern des Streifens, so kann man jetzt sagen: In welchem Punkte ξ^* auf C_n man auch die Potenzreihenentwicklung für $\frac{F(\xi)}{\xi - z}$ bildet, stets genügen die Koëffizienten der Entwicklung der Bedingung

$$|a_\nu| < \frac{G}{h^\nu}.$$

Von der Potenzreihenentwicklung für $\frac{F(\xi)}{\xi - z}$ ausgehend, kann man die Ungleichung bilden

$$\left| \frac{F(\xi)}{\xi - z} - \frac{F(\xi^*)}{\xi^* - z} \right| \leq G \cdot \left\{ \frac{|\xi - \xi^*|}{h} + \frac{|\xi - \xi^*|^2}{h^2} + \cdots \right\} = \frac{G|\xi - \xi^*|}{h - |\xi - \xi^*|}.$$

Diese Ungleichung zeigt also, dass man für jeden Punkt ξ^* auf C_n eine Umgebung (σ), nämlich $|\xi - \xi^*| < \sigma$, angeben kann, so dass

$$\left|\frac{F(\xi)}{\xi-z}-\frac{F(\xi^*)}{\xi^*-z}\right|\leq\frac{G\sigma}{h-\sigma},$$

falls ξ ein Punkt dieser Umgebung (σ) ist. In diesem Fall hat man σ so klein zu wählen, dass $\frac{G\sigma}{h-\sigma}$ kleiner ist, als die früher vorgelegte Zahl ε, also

$$\frac{G\sigma}{h-\sigma}<\varepsilon \quad \text{oder} \quad \sigma<\frac{\varepsilon h}{\varepsilon+G}.$$

So gelangt man schliesslich zu folgendem Ergebnis: Bedeutet ξ^* irgend einen bestimmten Punkt der Randkurve C_n und ist ξ ein Punkt der Umgebung (σ) von ξ^*, dann ist der absolute Betrag der Differenz der beiden Funktionswerte von $\frac{F(\xi)}{\xi-z}$ in den Punkten ξ und ξ^* kleiner als die gegebene Zahl ε, falls z ein Punkt der Umgebung (ϱ) von z_0 ist; oder in Zeichen

$$\left|\frac{F(\xi)}{\xi-z}-\frac{F(\xi^*)}{\xi^*-z}\right|<\varepsilon, \text{ wenn } |\xi-\xi^*|<\sigma, \ |z-z_0|<\varrho.$$

Nun lässt sich aber zufolge der Annahme über die Verteilung der auf C_n fixierten Punkte, die Anzahl λ stets so gross wählen, etwa gleich λ_1, dass die Ungleichungen gelten

$$|\xi_{1,\lambda_1}-\xi_{\lambda_1,\lambda_1}|<\sigma, \ |\xi_{2,\lambda_1}-\xi_{1,\lambda_1}|<\sigma, \ \cdots |\xi_{\lambda_1,\lambda_1}-\xi_{\lambda_1-1,\lambda_1}|<\sigma.$$

Fasst man nun ξ wieder nur als Punkt auf dem Teilwege $[\xi_{\mu-1,\lambda_1}, \xi_{\mu,\lambda_1}]$ auf und setzt man $\xi^*=\xi_{\mu,\lambda_1}$, so gilt für die genannten Punkte ξ die Ungleichung $|\xi-\xi_{\mu,\lambda_1}|<\sigma$, und daraus folgt mit Benützung des vorhin ausgesprochenen Resultates

$$\left|\frac{F(\xi)}{\xi-z}-\frac{F(\xi_{\mu,\lambda_1})}{\xi_{\mu,\lambda_1}-z}\right|<\varepsilon.$$

Damit ist die früher gemachte Annahme bewiesen und somit auch bewiesen, dass $R_\lambda(z)$ für alle z innerhalb C_{n-1} und ausserhalb C_{n+1} gleichmässig konvergiert gegen den Wert des Integrals

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{F(\xi)}{\xi-z}\,d\xi.$$

Für einen Punkt z innerhalb C_{n-1} hat dieses Integral den Wert $F(z)$. Da man die beliebige Zahl ε gleich $\frac{1}{n}$ setzen darf, so gelangt man zu der Ungleichung

$$\left| F(z) - R_\lambda(z) \right| < \frac{1}{n},$$

die sicher erfüllt ist, wenn $\lambda > \lambda_1$ ist. Nebenbei erhält man für einen Punkt z ausserhalb C_{n+1} die Ungleichung

$$\left| R_\lambda(z) \right| < \frac{1}{n}.$$

Nun wird man einsehen, dass mit wachsendem n auch λ_1 zunimmt, so dass man sich λ_1 als eine mit n wachsende Funktion von n zu denken hat, etwa $\lambda_1(n)$; setzt man noch zur Abkürzung

$$R_{\lambda_1(n)}(z) = r_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_1^{\lambda} \frac{F(\xi_{\mu,\lambda_1(n)})}{\xi_{\mu,\lambda_1(n)} - z} \left(\xi_{\mu,\lambda_1(n)} - \xi_{\mu-1,\lambda_1(n)} \right),$$

so gelangt man zu den am Anfang angekündigten Ungleichungen

$$\left| F(z) - r_n(z) \right| < \frac{1}{n}, \quad z \text{ innerhalb } C_{n-1}$$

und

$$\left| r_n(z) \right| < \frac{1}{n}, \quad z \text{ ausserhalb } C_{n+1}.$$

Als zweiten Schritt beweist Runge einen Satz über die Verlegung der Pole von $r_n(z)$; betrachtet man nämlich irgend ein zusammenhängendes Gebiet B der Gauss'schen Ebene, und seien a und b irgend zwei Punkte innerhalb B, dann kann man a mit b durch einen kontinuierlichen Linienzug verbinden, der ganz innerhalb B verläuft. Der Satz von Runge hat folgenden Inhalt: Ist eine rationale Funktion gegeben, die nur einen Pol im Punkte a hat, so kann man stets eine andere rationale Funktion angeben, die nur einen Pol im Punkte b besitzt und die von der gegebenen rationalen Funktion ausserhalb dem Gebiete B beliebig wenig abweicht. Der Satz ist auch noch gültig, wenn einer der Punkte, etwa b, gleich ∞ ist.

Die Pole der rationalen Funktion $r_n(z)$ liegen sämtlich auf dem Rande von S_n; wir wenden den Satz von Runge an und be-

trachten das Äussere von S_{n-1} als das Gebiet B, das offenbar zusammenhängend ist und den Punkt $z = \infty$ enthält, was man leicht einsieht, wenn man zur z-Kugel übergeht; wir können dann die Pole der einzelnen Glieder von $r_n(z)$ sämtlich in den Punkt $z = \infty$ verlegen, mit andern Worten, diese einzelnen Glieder für alle z innerhalb S_{n-1} durch ganze rationale Funktionen beliebig genau ausdrücken; dann wird aber auch $r_n(z)$, als endliche Summe von ganzen rationalen Funktionen, beliebig genau durch eine ganze rationale Funktion, etwa $g_n(z)$, ausgedrückt, für alle z innerhalb S_{n-1}. Indem man diese Genauigkeit wieder $\frac{1}{n}$ setzt, erhält man

$$\left| r_n(z) - g_n(z) \right| < \frac{1}{n}, \; z \text{ innerhalb } C_{n-1};$$

unter Hinzuziehung der frühern Ungleichung

$$\left| F(z) - r_n(z) \right| < \frac{1}{n}, \; z \text{ innerhalb } C_{n-1},$$

erhält man durch Addition der beiden Ungleichungen

$$\left| F(z) - g_n(z) \right| < \frac{2}{n}, \; z \text{ innerhalb } C_{n-1}.$$

Auf Grund dieser Ungleichung lässt sich die gleichmässige Konvergenz der nach ganzen rationalen Funktionen $g_n(z)$ fortschreitenden Entwicklung

$$F(z) = g_1(z) + [g_2(z) - g_1(z)] + [g_3(z) - g_2(z)] + \cdots$$

für alle z innerhalb S leicht erkennen.

§ 2

Existenzbeweis von D. Hilbert.

Eine von Runge's wesentlich verschiedene Methode benützt *Hilbert*, um denselben Satz zu beweisen,[1]) den er in folgender Form ausdrückt:

Es sei in der Ebene der komplexen Variabeln z irgend ein endliches, einfach zusammenhängendes und die Ebene nirgends mehrfach überdeckendes Gebiet J und ferner eine im Innern dieses Gebietes J überall reguläre analytische Funktion $F(z)$ der kom-

[1]) In der Einleitung zitiert, pag. 6, Note 2.

plexen Variabeln z vorgelegt; dann lässt sich diese Funktion $F(z)$ stets in eine unendliche Reihe

$$F(z) = G_1(z) + G_2(z) + G_3(z) + \cdots$$

entwickeln, welche in der Umgebung jedes Punktes im Innern von J gleichmässig konvergiert und deren Glieder $G_1(z)$, $G_2(z)$, $G_3(z)\ldots$ sämtlich ganze rationale Funktionen von z sind.

Die Funktion $F(z)$ lässt sich leicht in eine unendliche Reihe entwickeln, deren sämtliche Glieder *rationale* Funktionen sind und die innerhalb J gleichmässig konvergiert. Man denke sich auf dem Rande des Gebietes J in derselben Weise wie früher λ Punkte verteilt

$$\xi_{1,\lambda},\ \xi_{2,\lambda},\ \xi_{3,\lambda},\ \cdots,\ \xi_{\lambda,\lambda};$$

wenn sich die Funktion $F(z)$ auf dem Rande des Gebietes J regulär und analytisch verhält, so lässt sie sich darstellen mit Hilfe der Cauchy'schen Integralformel; es ist dann

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(J)}^{\cdot} \frac{F(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$$

und auf Grund der Definition des bestimmten Integrals kann es folgendermassen geschrieben werden

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(J)}^{\cdot} \frac{F(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = \lim_{\lambda=\infty}\left\{\frac{1}{2\pi i}\sum_{1}^{\lambda\mu} \frac{F(\xi_{\mu,\lambda})}{\xi_{\mu,\lambda} - z}(\xi_{\mu,\lambda} - \xi_{\mu-1,\lambda})\right\}.$$

Setzt man wieder zur Abkürzung

$$R_\lambda(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{1}^{\lambda\mu} \frac{F(\xi_{\mu,\lambda})}{\xi_{\mu,\lambda} - z}(\xi_{\mu,\lambda} - \xi_{\mu-1,\lambda}),$$

so wissen wir aus den früheren Entwicklungen, dass $R_\lambda(z)$ innerhalb J gleichmässig gegen $F(z)$ konvergiert, und daraus folgt sofort folgende Darstellung

$$F(z) = R_1(z) + [R_2(z) - R_1(z)] + [R_3(z) - R_2(z)] + \cdots,$$

deren Glieder rationale und innerhalb J reguläre analytische Funktionen sind, und die innerhalb J gleichmässig konvergent ist.

Sehr einfach gestaltet sich der Beweis des am Anfang genannten Satzes in dem Falle, wo das Gebiet J überall konvex nach

aussen gekrümmt ist. Dann lassen sich die rationalen Glieder durch ganze rationale Funktionen von z beliebig genau annähern; denn in diesem Falle kann man durch jeden Punkt $\xi_{\mu,\lambda}$ einen Kreis legen, der das Gebiet J vollständig umschliesst. Bezeichnet man mit $c_{\mu,\lambda}$ den Mittelpunkt dieses Kreises, so lässt sich der Ausdruck $\frac{1}{\xi_{\mu,\lambda}-z}$ in eine innerhalb dieses Kreises konvergente Potenzreihe von $(z-c_{\mu,\lambda})$ entwickeln, nämlich

$$\frac{1}{\xi_{\mu,\lambda}-z} = a_0^{(\mu)} + a_1^{(\mu)}(z-c_{\mu,\lambda}) + a_2^{(\mu)}(z-c_{\mu,\lambda})^2 + \cdots .$$

Nun lässt sich wegen der gleichmässigen Konvergenz der Reihe stets eine ganze positive Zahl n_μ so angeben, dass

$$\left|\frac{1}{\xi_{\mu,\lambda}-z} - \left(a_0^{(\mu)} + a_1^{(\mu)}(z-c_{\mu,\lambda}) + a_2^{(\mu)}(z-c_{\mu,\lambda})^2 + \cdots + a_{n_\mu}^{(\mu)}(z-c_{\mu,\lambda})^{n_\mu}\right)\right| < \frac{1}{\lambda^2}$$

wobei $\mu = 1, 2, 3, \cdots, \lambda$. Beachtet man noch, dass sich die Funktion $F(z)$ auf dem Rande regulär verhält, so liegt der absolute Betrag jeder der Grössen

$$F(\xi_{1,\lambda})(\xi_{2,\mu}-\xi_{1,\lambda}),\ F(\xi_{2,\lambda})(\xi_{3,\lambda}-\xi_{2,\lambda})\cdots,\ F(\xi_{\lambda-1,\lambda})(\xi_{\lambda,\lambda}-\xi_{\lambda-1,\lambda}),$$

unterhalb einer endlichen Zahl G, so dass man zu folgendem System von Ungleichungen gelangt:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\frac{F(\xi_{\mu,\lambda})}{\xi_{\mu,\lambda}-z}(\xi_{\mu,\lambda}-\xi_{\mu-1,\lambda}) - \left(A_0^{(\mu)} + A_1^{(\mu)}(z-c_{\mu,\lambda}) + A_2^{(\mu)}(z-c_{\mu,\lambda})^2 + \cdots A_{n_\mu}^{(\mu)}(z-c_{\mu,\lambda})^{n_\mu}\right)\right| < \frac{G}{2\pi\lambda^2},$$

wenn man

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{F(\xi_{\mu,\lambda})}{\xi_{\mu,\lambda}-z}(\xi_{\mu,\lambda}-\xi_{\mu-1,\lambda})\cdot a_\nu^{(\mu)} = A_\nu^{(\mu)}$$

setzt und für μ der Reihe nach die Werte $\mu = 1, 2, 3, \ldots, \lambda$. Addiert man diese λ Ungleichungen, so erhält man links eine endliche Summe, in der man wieder die früher definierte Funktion $R_\lambda(z)$ erkennt und davon ist eine endliche Summe von endlichen Potenzreihen zu subtrahieren, also eine ganze rationale Funktion von z, deren Grad offenbar von der Zahl λ abhängt; die Ungleichung wird lauten:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \sum_{1}^{\lambda} \mu \frac{F(\xi_{\mu,\lambda})}{\xi_{\mu,\lambda} - z} (\xi_{\mu,\lambda} - \xi_{\mu-1,\lambda}) - G_\lambda(z) \right| < \frac{G}{2\pi\lambda}.$$

Diese Ungleichung gilt jedenfalls nur für diejenigen Punkte z, die im Innern des von allen Kreisen zugleich überdeckten Gebietes liegen, das von dem Gebiete J umsoweniger verschieden ist, je grösser die Anzahl λ der Punkte $\xi_{\mu,\lambda}$ auf dem Rande von J ist; geht man zum Limes $\lambda = \infty$ über, so erhält man

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(J)}^{} \frac{F(\xi)}{\xi - z} d\xi = \lim_{\lambda = \infty} G_\lambda(z),$$

welcher Limes gleichmässig konvergiert für alle z innerhalb J; daraus gewinnt man für $F(z)$ die Entwicklung

$$F(z) = G_1(z) + [G_2(z) - G_1(z)] + [G_3(z) - G_2(z)] + \cdots,$$

die innerhalb J gleichmässig konvergent ist.

Bedeutend komplizierter gestaltet sich der Beweis des Satzes in dem Falle, wo J ein einfach zusammenhängendes, endliches, sonst aber beliebiges Gebiet ist. Der Beweis soll hier nur kurz skizziert werden.

Zunächst beweist Hilbert den Satz für eine Lemniskate L; darunter versteht er eine geschlossene Kurve in der Gauss'schen Ebene, die im Innern eine gewisse Anzahl n von einander verschiedene Punkte $z = c$, $z = c_1$, $z = c_2, \ldots$; $z = c_{n-1}$ enthält, derart, dass die n Abstände eines beliebigen Punktes z von den n Punkten $c, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$, ein konstantes Produkt R besitzen. Beachtet man, dass der absolute Betrag der Differenz $|z - c_\nu|$ den Abstand der Punkte z und c_ν bedeutet, so heisst die Bedingung, dass der Punkt z auf einer solchen Lemniskate L liegt,

$$|z - c| \cdot |z - c_1| \cdot |z - c_2| \cdots |z - c_{n-1}| = R.$$

Es sei $F(z)$ eine beliebige innerhalb L reguläre analytische Funktion, die daselbst in eine unendliche Reihe entwickelt werden soll; bezeichnet man noch mit $D(z)$ die Diskriminante der algebraischen Beziehung n^{ten} Grades in z

$$(z - c)(z - c_1)(z - c_2) \cdots (z - c_{n-1}) - \xi = 0, \qquad (1)$$

so ist $D(z)$ eine ganze rationale Funktion der Koëffizienten, also auch eine ganze rationale Funktion von ξ; da sich aber ξ aus der

Beziehung (1) selbst als ein Polynom in z ergibt, so ist $D(z)$ eine ganze rationale Funktion von z. Dann lässt sich stets eine ganze rationale Funktion $G(z)$ angeben, so dass sich die Funktion

$$\varphi(z) = \frac{F(z) - G(z)}{D(z)}$$

innerhalb L regulär verhält; man muss nur dafür sorgen, dass jede Nullstelle m^{ter} Ordnung von $D(z)$, die innerhalb L liegt, auch Nullstelle von $F(z) - G(z)$ wird und zwar von m^{ter} oder auch höherer Ordnung. Es mögen mit $z, z_1, z_2, \ldots z_{n-1}$ die n Zweige der Relation 1.) bezeichnet werden, die sich alle in der Umgebung des Punktes $\xi = 0$ regulär verhalten; nun wird folgendes System gebildet

$$\begin{aligned}
\varphi(z) + \varphi(z_1) + \cdots + \varphi(z_{n-1}) &= \Phi(\xi) \\
z\,\varphi(z) + z_1\,\varphi(z_1) + \ldots + z_{n-1}\,\varphi(z_{n-1}) &= \Phi'(\xi) \\
z^2\,\varphi(z) + z_1^{\,2}\,\varphi(z_1) + \cdots + z_{n-1}\,\varphi(z_{n-1}) &= \Phi''(\xi) \qquad (2) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
z^{n-1}\,\varphi(z) + z_1^{\,n-1}\,\varphi(z_1) + \cdots + z_{n-1}^{n-1}\,\varphi(z_{n-1}) &= \overset{(n-1)}{\Phi}(\xi);
\end{aligned}$$

die dadurch definierten Funktionen $\Phi(\xi)$, $\Phi'(\xi)$, $\Phi''(\xi), \cdots$, $\overset{(n-1)}{\Phi}(\xi)$ erweisen sich als regulär und analytisch für $|\xi| < R$ und lassen sich also im Innern des Kreises $|\xi| = R$ in eine Potenzreihe nach ξ entwickeln. Indem dann aus dem System (2) $\varphi(z_1)$, $\varphi(z_2), \ldots$ $\varphi(z_{n-1})$ eliminiert werden, stösst man für das Produkt $D(z)\,\varphi(z)$ auf eine Darstellung folgender Form

$$D(z)\,\varphi(z) = F(z) - G(z) = g(z)\,\Phi(\xi) + g'(z)\,\Phi'(\xi) + \cdots + \overset{(n-1)}{g}(z)\,\overset{(n-1)}{\Phi}(\xi),$$

worin $g(z)$, $g'(z), \ldots$, $\overset{(n-1)}{g}(z)$ ganze rationale Funktionen von z sind. Setzt man dann für

$$\overset{(\nu)}{\Phi}(\xi) = a_0^{(\nu)} + a_1^{(\nu)}\,\xi + a_2^{(\nu)}\,\xi^2 + \cdots, \text{ wo } |\xi| < R,$$

so gewinnt man für $F(z)$ die Darstellung

$$\begin{aligned}
F(z) = G(z) &+ \left(a_0^{(0)}\,g(z) + a_0^{(1)}\,g'(z) + \cdots + a_0^{(n-1)}\,\overset{(n-1)}{g}(z)\right) + \\
&+ \left(a_1^{(0)}g(z) + a_1^{(1)}\,g'(z) + \cdots + a_1^{(n-1)}\,\overset{(n-1)}{g}(z)\right)\xi + \\
&+ \left(a_2^{(0)}\,g(z) + a_2^{(1)}\,g'(z) + \cdots + a_2^{(n-1)}\,\overset{(n-1)}{g}(z)\right)\xi^2 + \cdots;
\end{aligned}$$

wenn man hierin für ξ den Wert einsetzt,

$$\xi = (z - c)(z - c_1) \cdots (z - c_{n-1}),$$

so erhält man die gesuchte Darstellung, welche für $\xi < R$, also für alle Punkte z im Innern der Lemniskate L gleichmässig konvergiert.

Der zweite Schritt besteht darin, dass mit Hilfe bekannter Sätze aus der Potentialtheorie folgender Hilfssatz bewiesen wird:

Sind C_1 und C_2 zwei doppelpunktslose Kurven, von denen etwa C_2 ganz innerhalb C_1 verläuft, so gibt es auf der Kurve C_2 stets n Punkte c, c_1, c_2, ... c_{n-1}, und zu diesen Punkten gehört stets eine Lemniskate L von der Eigenschaft, dass sie die Kurve C_2 ganz im Innern enthält und selbst ganz innerhalb C_1 verläuft.

Unter Benützung dieses Hilfssatzes gelingt es in einfacher Weise den Satz allgemein zu beweisen. Sei $F(z)$ eine innerhalb J reguläre analytische Funktion; zum Gebiete J denke man sich ein System unendlich vieler ineinandergeschachtelter Gebiete $J_1, J_2, J_3, \ldots$, von denen jedes folgende in der Reihe das vorhergehende ganz im Innern enthält und selbst ganz im Innern des nächstfolgenden liegt, und zwar so, dass jeder Punkt z, der im Innern von J liegt, von einem gewissen m ab in jedem Gebiete J_m, J_{m+1}, J_{m+2}, ... liegt (man denke etwa an die Gebiete, die beim Runge'schen Beweis vorkamen); dann existiert eine Lemniskate L_m, die das Gebiet J_m ganz einschliesst und selbst ganz innerhalb dem Gebiete J liegt $[m = 1, 2, 3, \ldots]$. Nun lässt sich aber die Funktion $F(z)$ im Innern der Lemniskate L_m durch eine Reihe, die nach ganzen rationalen Funktionen von z fortschreitet, darstellen und lässt sich somit innerhalb J_m durch eine ganze rationale Funktion von z, $G_m(z)$, beliebig genau annähern, so dass z. B.

$$\left| J(z) - G_m(z) \right| < \frac{1}{m} \tag{3}$$

für jedes z innerhalb J_m; da mit wachsendem m J_m gegen J konvergiert, so gilt für jeden Punkt z im Innern des Gebietes J

$$F(z) = \lim_{m = \infty} G_m(z)$$

oder

$$F(z) = G_1(z) + [G_2(z) - G_1(z)] + [G_3(z) - G_2(z)] + \cdots,$$

deren gleichmässige Konvergenz ohne weiteres aus Ungleichung (3) folgt.

Damit ist der Hilbert'sche Beweis in kurzen Zügen angegeben.

§ 3.

Existenzbeweis von Mittag-Leffler für den Stern.

Zu einem weniger allgemeinen Resultat gelangt *Mittag-Leffler* auf einem andern Wege. Er definiert ein ganz bestimmtes Gebiet, den Stern, und gibt für dieses Gebiet eine Darstellung von $F(z)$, die nach ganzen rationalen Funktionen von z fortschreitet und für jedes Gebiet, das innerhalb des Sterns liegt, gleichmässig konvergiert. Sein Hauptmittel ist das Prinzip der analytischen Fortsetzung. Mittag-Leffler stützt sich dabei auf folgende Tatsache: Sind in einem regulären Punkte $z = a$ der Gauss'schen Ebene der Funktionswert und der Wert sämtlicher Ableitungen einer eindeutigen analytischen Funktion $F(z)$ gegeben, so ist dadurch die Funktion in einem gewissen Kontinuum K, das den Punkt $z = a$ einschliesst, vollständig bestimmt; unter einem Kontinuum ist hier gemeint ein beliebiges Gebiet, das vom Punkte $z = a$ aus durch analytische Fortsetzung kann erreicht werden. Ein solches Kontinuum ist der Stern. Es sei $F(z)$ eine eindeutige analytische Funktion, gegeben durch die Elemente

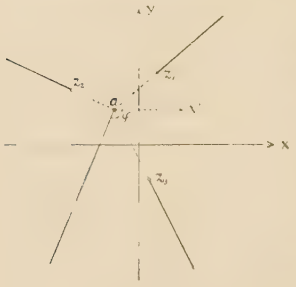
$$F(a),\ F'(a),\ F''(a),\ \cdots;$$

dann denke man sich vom Punkte $z = a$ aus nach allen singulären Punkten der Funktion $F(z)$, z_1, z_2, . . ., z_i, . . ., Strahlen gezogen. Schliesst man auf jedem dieser Strahlen den Teil vom singulären Punkt bis zum Punkte $z = \infty$ von der Gauss'schen Ebene aus, dann ist das übrig bleibende Gebiet der *Hauptstern der Funktion* $F(z)$ mit dem Mittelpunkt $z = a$; dieser Stern möge von nun an mit H bezeichnet werden.

Das Hauptziel wird sein, zu zeigen, dass eine Darstellung von $F(z)$ von der angegebenen Art für diesen Stern H möglich ist. Zunächst muss ein System unendlich vieler Sterne vom Hauptstern H abgeleitet werden, um das Prinzip der analytischen Fortsetzung in Anwendung bringen zu können. Demnach werden die sich hier anschliessenden Betrachtungen in zwei Teile zerfallen; zuerst

werden die Hülfssterne abgeleitet, währenddem im zweiten Teil der Gedankengang der analytischen Durchführung gegeben wird.

Der Hülfsstern $H^{(n)}$ wird folgendermassen definiert: Man betrachtet einen bestimmten Strahl ausgehend vom Punkte $z = a$, der mit der positiven Richtung der x-Axe den Winkel φ bildet; wählt man eine positive Grösse r so klein, dass jeder Kreis mit dem Radius r und dem Mittelpunkt irgendwo auf diesem Strahl und zwar auf der Strecke $a \ldots a + (n-1) r e^{i\varphi}$ nur Punkte von H einschliesst, dann sei ϱ die obere Grenze dieser Grössen r für den fixierten Strahl, so dass also für ϱ das Gesagte gerade noch zutrifft, dagegen nicht mehr für jedes $r > \varrho$; trägt man von a aus auf diesem Strahl die Grösse $n \cdot \varrho$ ab, so erhält man den Punkt von $H^{(n)}$ auf diesem Strahl. Nun sieht man ein, dass der Stern $H^{(n)}$ nur solche Punkte einschliesst, die auch im Innern von $H^{(n+1)}$ liegen und dass alle Sterne $H^{(1)}$, $H^{(2)}$, $H^{(3)}, \ldots$ nur Punkte des Hauptsterns H enthalten.

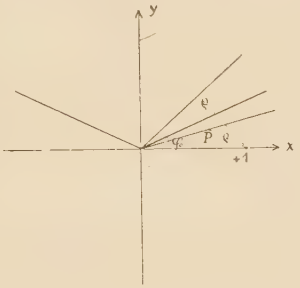


Figur 1.

Der Stern $H^{(1)}$ ist in allen Fällen ein Kreis mit dem Mittelpunkte $z = a$, nämlich der Konvergenzkreis der Taylor'schen Entwicklung von $F(z)$ um diesen Punkt $z = a$. Es mag hier am Platze sein für eine einfache Funktion diese Sterne zu konstruieren, etwa für die Funktion $\frac{1}{1-z}$, wenn man als Zentrum den Punkt $z = 0$ wählt. Mittag-Leffler gibt in seiner Abhandlung [1]) für diese Funktion Gebiete an, welche aber nicht die Sterne selbst sind, sondern von denen man nur sagen kann, dass der jeweilige Stern ganz innerhalb des betreffenden Gebietes liegt. Die wirklichen Sterne $H^{(n)}$ dieser Funktion bestehen alle nur aus vier Kreisbogen; um dies einzusehen, beachte man, dass der Hauptstern H der Funktion $\frac{1}{1-z}$ und dem Zentrum $z = 0$ die ganze Zahlenebene ist mit Ausschluss der Punkte von L_{+1}. (Unter L_a verstehe man die Gesamtheit der

[1]) Acta mathematica 24 (1901). „Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène." (Deuxième note.) pg. 196.

Punkte auf dem vom Zentrum $z = 0$ nach dem Punkte $z = \alpha$ gezogenen Strahle, die zwischen den beiden Punkten $z = \alpha$ und $z = \infty$ liegen.) Fixiert man einen beliebigen Strahl, der vom Punkte $z = 0$ ausgeht und in der linken Halbebene liegt, dann erkennt man, dass für alle diese Strahlen $\varrho = 1$ zu wählen ist, so dass derjenige Teil des Sterns $H^{(n)}$, der in der linken Halbebene liegt, ein Halbkreis ist mit dem Radius n und dem Zentrum $z = 0$. Fixiert man einen Strahl, der mit der $+x$-Axe den Winkel φ bildet, welcher folgenden Ungleichungen genügen soll



Figur 2.

$$\varphi_0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2};$$

dabei wird φ_0 bestimmt durch

$$tg\,\varphi_0 = \frac{1}{n-1};$$

dieser Grenzstrahl mit dem Winkel φ_0 liegt dann offenbar so, dass sein Normalabstand vom Punkte $z = +1$ $(n-1)$ mal enthalten ist in der Strecke zwischen dem Punkte $z = 0$ und dem Fusspunkte der Normalen. Für den fixierten Strahl ist ϱ gleich seinem Normalabstand δ vom Punkte $z = +1$; nun ist

$$\delta = \varrho = sin\,\varphi$$

und daraus ergibt sich

$$R = n \cdot \varrho = n \cdot sin\,\varphi \tag{3}$$

die Gleichung in Polarkoordinaten R, φ desjenigen Teils der Begrenzungskurve von $H^{(n)}$, der zwischen den Strahlen mit den Winkeln φ_0 und $\frac{\pi}{2}$ liegt; dieses ist die Gleichung eines Kreisbogens, dessen Zentrum auf der y-Axe liegt und die Ordinate $\frac{n}{2}$ hat und dessen Radius $\frac{n}{2}$ beträgt. Aus Symmetriegründen erhält man in der untern Halbebene das Spiegelbild zur x-Axe; diese beiden Kreisbogen gehen in den Schnittpunkten mit der y-Axe ohne Knick in den Kreisbogen in der linken Halbebene über. Schliesslich betrachten wir noch einen Strahl, dessen Winkel φ zwischen den Grenzen

$$0 < \varphi < \varphi_0$$

liegt; für einen solchen Strahl ist ϱ nicht gleich dem Normalabstand vom Punkte $z = +1$, sondern offenbar grösser. Man hat auf diesem Strahl einen Punkt P so zu bestimmen, dass

$$\overline{P,0} = (n-1) \cdot \overline{P,+1};$$

es gibt zwei solche Punkte, P_1 und P_2, und wenn man denjenigen mit P bezeichnet, der näher bei $z = 0$ liegt, so erkennt man, dass die gesuchte Grösse ϱ gleich ist dieser Strecke $\overline{P,+1}$. Aus dem Dreieck mit den Ecken P, $z = 0$, $z = +1$ lässt sich dieses ϱ berechnen mit Hilfe des Cosinussatzes, nämlich

$$\varrho^2 = (n-1)^2 \varrho^2 + 1 - 2(n-1)\varrho \cos\varphi;$$

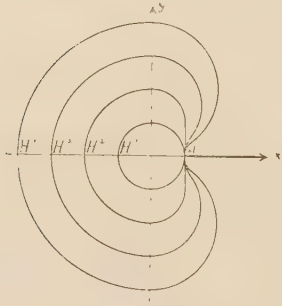
berechnet man daraus ϱ, so erhält man

$$\varrho = \frac{(n-1)\cos\varphi - \sqrt{(n-1)^2 \cos^2\varphi - (n^2 - 2n)}}{n^2 - 2n}$$

wobei die Wurzel stets reell ist. Für den Winkelraum $0 < \varphi < \varphi_0$ stellt also

$$R = n\varrho = \left(1 + \frac{1}{n-2}\right)\cos\varphi - \sqrt{\left(1 + \frac{1}{n-2}\right)^2 \cos^2\varphi - \left(1 + \frac{2}{n-2}\right)} \quad (4)$$

die Gleichung der Begrenzungskurve des Sterns $H^{(n)}$ dar in den Polarkoordinaten R, φ; dies ist die Gleichung eines Kreisbogens, der durch den Punkt $z = +1$ geht, dessen Mittelpunkt auf der $+x$-Axe liegt, mit der Abszisse $\left(1 + \frac{1}{n-2}\right)$ und dessen Radius $\frac{1}{n-2}$ beträgt. Aus Symmetriegründen erhält man wieder in der untern Halbebene das Spiegelbild zur x-Axe. Die Kreisbogen, die durch die Gleichungen (3) und (4) dargestellt werden, gehen beide durch einen Punkt, der auf dem Strahle mit dem Winkel φ_0 liegt. Man kann beweisen, dass dieser Punkt und die Mittelpunkte der beiden Kreisbogen auf einer Geraden liegen; dadurch ist dann bewiesen, dass die Tangenten dieser Kreisbogen stetig in einander übergehen. Damit ist der Stern $H^{(n)}$ gewonnen. Die Randkurven von $H^{(1)}$, $H^{(2)}$, $H^{(3)}$, $H^{(4)}$ haben Formen, wie sie die nebenstehende Figur zeigt. Je grösser man



Figur 3.

den Wert von n wählt, desto mehr schmiegt sich die Randkurve von $H^{(n)}$ der Linie L_{+1} an, und zwar so, dass, wenn irgend ein Punkt z im Innern des Hauptsterns H gegeben ist, man immer eine Zahl n_1 so gross wählen kann, dass der Stern $H^{(n)}$ für alle $n \geqq n_1$ den Punkt z einschliesst; es ist also

$$\lim_{n = \infty} H^{(n)} = H .$$

Es bietet nun keinerlei Schwierigkeit, die interessantere Aufgabe zu lösen, nämlich den Stern $H^{(n)}$ für eine beliebige Funktion $F(z)$ zu konstruieren; man hat nur zu beachten, dass die Form des Sterns $H^{(n)}$ für die Funktion $\frac{1}{z - z_i}$ ganz unabhängig ist vom Winkel der Zahl z_i. Besitzt die Funktion $F(z)$ die singulären Punkte $z_1, z_2, \cdots, z_i, \cdots$ und ist $z = a$ ein regulärer Punkt von $F(z)$, dann möge der Hauptstern, der zur Funktion $\frac{1}{z - z_i}$ gehört, mit dem Zentrum $z = a$ S_i heissen; nun konstruiert man zu jedem singulären Punkte z_i ($i = 1, 2, 3, \ldots$) den Stern $S_i^{(n)}$, wie wenn die übrigen singulären Punkte nicht vorhanden wären; dann bildet der innerste Linienzug aller $S_i^{(n)}$ den Stern $H^{(n)}$, wenn man mit H den Hauptstern der Funktion $F(z)$ bezeichnet. Dieser Stern $H^{(n)}$ hat die Eigenschaft, dass stets eine Zahl n_1 so gross bestimmt werden kann, dass alle Sterne $H^{(n)}$ für $n \geqq n_1$ einen beliebig gegebenen Punkt z des Hauptsterns H einschliessen. Denn es ist $H^{(n)}$ das von allen Sternen $S_i^{(n)}$ ($i = 1, 2 3, \ldots$) gemeinsam überdeckte Gebiet der Gauss'schen Ebene; man hat also die Zahl n_1 so gross zu bestimmen, dass jeder einzelne Stern $S_i^{(n)}$ den gegebenen Punkt z einschliesst, was immer erreicht werden kann. Es gilt somit auch in diesem allgemeinen Fall

$$\lim_{n = \infty} H^{(n)} = H .$$

Indem man die genaue Kenntnis des Sterns $H^{(n)}$ benützt, kann man in etwas übersichtlicherer Weise, als es in der Abhandlung

von Mittag-Leffler geschieht, ein Gebiet konstruieren, das geeignet ist, das Prinzip der analytischen Fortsetzung zur Anwendung zu bringen.

Um den Randpunkt des Sterns $H^{(n)}$ auf einem beliebigen Strahl zu erhalten, muss man vom Punkte $z = a$ aus die zu diesem Strahl gehörige Grösse ϱ n mal abtragen; trägt man statt dessen nur die Grösse $(n-1)\cdot\varrho$ ab, so erhält man eine neue Figur, die man auch als Stern auffassen kann, der E heissen möge und welcher ganz innerhalb dem Sterne $H^{(n)}$ verläuft. Da nun

$$\lim_{n=\infty} n\cdot\varrho = \lim_{n=\infty} (n-1)\cdot\varrho$$

ist, so sieht man daraus, dass der Stern E im $lim\ n=\infty$ gegen den Stern $E^{(n)}$ konvergiert. Von diesem Stern E wird der Stern $E^{(n)}$ abgeleitet, der bekanntlich im $lim\ n=\infty$ gegen E konvergiert; schliesslich werden von $E^{(n)}$ noch weitere n Sterne abgeleitet, indem man statt ϱ der Reihe nach

$$\alpha\cdot\varrho,\ \alpha^2\cdot\varrho,\ \cdots,\ \alpha^n\cdot\varrho$$

setzt, wo α einen echten positiven Bruch bedeutet; die daraus entstehenden neuen Sterne mögen der Reihe nach

$$E_1^{(n)},\ E_2^{(n)},\ E_3^{(n)},\ \cdots,\ E_n^{(n)}$$

heissen. Es muss noch beigefügt werden, dass α ein echter Bruch von der Beschaffenheit sein muss, dass er sich mit wachsendem n der Einheit nähert, also etwa von der Form ist

$$\alpha = e^{-\frac{1}{\sqrt{n\cdot n}}};$$

es ist nun $\lim_{n=\infty} \alpha^n\cdot\varrho = \varrho$; daraus folgt, dass der Stern $E_n^{(n)}$ und mit ihm auch die übrigen Sterne $E_1^{(n)}, E_2^{(n)}, \ldots E_n^{(n)}$, die ihn alle einschliessen, im $lim\ n=\infty$ gegen $E^{(n)}$ konvergieren. Da aber dieser selbst gegen E konvergiert und dieser wiederum gegen H, so ist auch

$$lim\ E_n^{(n)} = H.$$

Das Gebiet $E_n^{(n)}$, dessen Existenz leicht nachzuweisen ist, ist dasjenige Gebiet, für welches dieselbe analytische Durchführung gültig

ist, wie sie Mittag-Leffler in seiner früher erwähnten Abhandlung für ein innerhalb H willkürlich gewähltes Gebiet anwendet; sie mag hier in kurzen Zügen wiedergegeben werden.

Sei z irgend ein Punkt des Sterns $E_n^{(n)}$, dann teile man die Strecke $\overline{a\,z}$ in n gleiche Teile; die $(n-1)$ Teilpunkte entsprechen den komplexen Zahlen

$$\xi_1 = a + \frac{z-a}{n},\ \xi_2 = a + 2\,\frac{z-a}{n},\ \cdots,\ \xi_{n-1} = a + (n-1)\,\frac{z-a}{n}.$$

Nach dem Vorausgeschickten ist jedenfalls

$$\overline{a\,z} = |z-a| < n\,\alpha^n\,\varrho < n\,\alpha^{n-1}\,\varrho < \cdots < n\,\alpha\,\varrho < n\,\varrho,$$

oder wenn man zur Abkürzung $\xi = \frac{z-a}{n}$ setzt, so erhält man die Ungleichungen

$$|\xi| < \alpha^n\,\varrho < \alpha^{n-1}\,\varrho < \cdots < \alpha\,\varrho < \varrho.$$

Umgibt man die Punkte $\xi_{n-1}, \xi_{n-2}, \ldots \xi_2, \xi_1, a$ der Reihe nach mit Kreisen mit den Radien $\varrho, \alpha\varrho, \ldots \alpha^{n-2}\varrho, \alpha^{n-1}\varrho$, so weiss man nun, dass dieses Kreissystem nur Punkte von E einschliesst, so dass der absolute Betrag von $F(z)$ im Innern dieses Kreissystems einen endlichen Wert hat. Für dieses System kann die analytische Fortsetzung durchgeführt werden, denn der Mittelpunkt jedes Kreises liegt stets im Innern jedes vorhergehenden Kreises; man hätte auch alle Radien dieser Kreise gleich ϱ wählen können und hätte dann auch ein System mit dieser Eigenschaft erhalten. Dass man aber die verschiedenen Radien $\varrho, \alpha\varrho, \ldots, \alpha^{n-1}\varrho$ gewählt hat, beruht darauf, dass es möglich wird gewisse Restglieder, die bei der Reihenentwicklung auftreten, abschätzen zu können.

Den Funktionswert im Punkte z kann man ausdrücken durch den Funktionswert und dem Werte der Ableitungen im Punkte ξ_{n-1}, nämlich

$$F(z) = \sum_{0}^{m_1} \lambda_1 \frac{F^{(\lambda_1)}(\xi_{n-1})}{\lambda_1!}\,(z-\xi_{n-1})^{\lambda_1} + \sum_{m_1+1}^{\infty} \lambda_1 \frac{F^{(\lambda_1)}(\xi_{n-1})}{\lambda_1!}\,(z-\xi_{n-1})^{\lambda_1}$$

oder

$$F(z) = \sum_{0}^{m_1} \lambda_1 \quad \frac{F^{(\lambda_1)}(\xi_{n-1})}{\lambda_1!} (z - \xi_{n-1})^{\lambda_1} + \varepsilon_1 ;$$

den Funktionswert an der Stelle ξ_{n-1} kann man wieder darstellen durch die Werte der Funktion und deren Ableitungen an der Stelle ξ_{n-2}; man erhält dann

$$\frac{F^{(\lambda_1)}(\xi_{n-1})}{\lambda_1!} \cdot \xi^{\lambda_1} = \sum_{0}^{\infty} \lambda_2 \quad \frac{F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(\xi_{n-2})}{\lambda_1!\ \lambda_2!} \cdot \xi^{\lambda_1+\lambda_2} ;$$

indem man diesen Wert oben einsetzt bekommt man

$$F(z) = \sum_{0}^{m_1} \lambda_1 \sum_{0}^{m_2} \lambda_2 \quad \frac{F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(\xi_{n-2})}{\lambda_1!\ \lambda_2!} \cdot \xi^{\lambda_1+\lambda_2} + \sum_{m_1+1}^{\infty} \lambda_1 \sum_{m_2+1}^{\infty} \lambda_2 \quad \frac{F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(\xi_{n-2})}{\lambda_1!\ \lambda_2!} \cdot \xi^{\lambda_1+\lambda_2} + \varepsilon_1$$

oder

$$F(z) = \sum_{0}^{m_1} \lambda_1 \sum_{0}^{m_2} \lambda_2 \quad \frac{F^{(\lambda_1+\lambda_2)}(\xi_{n-2})}{\lambda_1!\ \lambda_2!} \cdot \xi^{\lambda_1+\lambda_2} + \varepsilon_2 + \varepsilon_1 .$$

Wenn man in dieser Art fortfährt, so erhält man schliesslich

$$F(z) = \sum_{0}^{m_1} \lambda_1 \sum_{0}^{m_2} \lambda_2 \cdots \sum_{0}^{m_n} \lambda_n \quad \frac{F^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)}(a)}{\lambda_1! \cdot \lambda_2! \cdots \lambda_n!} \left(\frac{z-a}{n}\right)^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)} + \varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n ;$$

diese Überlegungen kann man für jeden Punkt z im Innern des Sterns $E_n^{(a)}$ ausführen; man hat hier zunächst eine Darstellung der Funktion $F(z)$ gefunden, die für den Stern $E_n^{(a)}$ gültig ist. Nach einer umständlichen Rechnung gelangt man für die Abschätzung der Restglieder zu folgender Ungleichung

$$|\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n| < \frac{C}{\sqrt{n}} ;$$

worin C eine positive Konstante bedeutet; die Ungleichung gilt aber nur, falls die Zahlen $m_1, m_2, \ldots, m_n$ bestimmten Bedingungen genügen, was stets erreicht werden kann, falls man n genügend gross wählt. Setzt man noch zur Abkürzung

$$g_n(z) = \sum_0^{m_1} \lambda_1 \sum_0^{m_2} \lambda_2 \cdots \sum_0^{m_n} \lambda_n \frac{F^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)}(a)}{\lambda_1!\,\lambda_2!\cdots\lambda_n!} \left(\frac{z-a}{n}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n},$$

so sieht man ein, dass $g_n(z)$ eine ganze rationale Funktion ist vom Grade $(m_1 + m_2 + \ldots + m_n)$. Nun gilt die Ungleichung

$$|F(z) - g_n(z)| < \frac{C}{\sqrt{n}}$$

für jedes z innerhalb $E_n^{(n)}$ und daraus folgt

$$F(z) = \lim_{n=\infty} g_n(z)$$

für jedes z innerhalb H. Dadurch gewinnt man eine für jedes innerhalb H liegende Gebiet gleichmässig konvergente Darstellung

$$F(z) = g_1(z) + [g_2(z) - g_1(z)] + [g_3(z) - g_2(z)] + \ldots .$$

Spätere Abhandlungen von Mittag-Leffler verfolgen einen ähnlichen Zweck, nämlich die Funktion $F(z)$ in einem bestimmten möglichst grossen Gebiet der Gauss'schen Ebene darzustellen, was mit Hilfe anderer Methoden als die auf den vorigen Seiten auseinandergesetzte erreicht wird.

Die in diesem Paragraphen in Kürze dargestellten Beweisverfahren weisen einen wesentlichen gemeinsamen Punkt auf; die Verfasser suchen eine ganze rationale Funktion, die noch von einem Index abhängt, etwa $G_n(z)$, so zu bestimmen, dass für alle z innerhalb des gewählten Gebietes die Ungleichung gilt

$$|F(z) - G_n(z)| < \omega(n),$$

wo $\omega(n)$ der Bedingung genügt $\lim_{n=\infty} \omega(n) = 0$, sonst aber beliebig sein kann; dadurch erhält man eine Darstellung von der Form

$$F(z) = G_1(z) + [G_2(z) - G_1(z)] + [G_3(z) - G_2(z)] + \cdots .$$

In der Möglichkeit der verschiedenen Annäherung von $F(z)$ durch eine ganze rationale Funktion $G_n(z)$ liegt der Grund für die grosse Mannigfaltigkeit einer polynomischen Entwicklung für ein bestimmtes Gebiet. Obwohl diese Mannigfaltigkeit für die Ausbildung der Theorie solcher polynomischer Reihen nicht gerade förderlich war,

so war damit doch ein erster grosser Schritt getan, nämlich die Möglichkeit solcher Entwicklungen für jedes beliebige, endliche, einfach zusammenhängende Gebiet S der Gauss'schen Ebene bewiesen zu haben.

Durch Herausgreifen einer bestimmten Klasse von polynomischen Entwicklungen können solche Reihen näher untersucht werden, was im nächsten Kapitel geschehen wird.

Kapitel II.

Spezielle polynomische Entwicklungen für ein beliebiges einfach zusammenhängendes Gebiet, das von einem einzigen glatten Linienzug begrenzt wird und das ganz im Endlichen liegt.

---

§ 4.

Über die Arbeit von G. Faber; spezielle polynomische Reihen.

Die interessanten Untersuchungen von G. Faber[1]) haben die Theorie der polynomischen Entwicklungen wesentlich gefördert. In der oben zitierten Abhandlung stellt sich Faber die Aufgabe, für den Fall, dass das Gebiet S von einem einzigen regulären analytischen Kurvenzuge begrenzt ist, diejenigen polynomischen Entwicklungen aufzustellen und zu untersuchen, bei denen die Polynome nur von der Form des Gebietes S, aber nicht von der darzustellenden Funktion abhängen. Eine solche Spezialisierung hat den frühern Entwicklungen gegenüber den grossen Vorteil, dass die Reihen, die nach diesen Polynomen fortschreiten, einem genaueren Studium zugänglich sind. Das Verfahren, das Faber anwendet, beruht nicht auf einer Annäherung von $F(z)$ durch eine ganze rationale Funktion; unter Benützung der konformen Abbildung formt er den Integranden der Cauchy'schen Integraldarstellung für $F(z)$ so um, dass sich im Integrand unmittelbar die erzeugende Funktion für die gesuchten Polynome ergibt. Über die

[1]) In der Einleitung zitiert, pag. 6, Note 4.

wichtigsten Theoreme seiner erwähnten Abhandlung will ich in diesem Paragraphen referieren.

Es sei S ein einfach zusammenhängendes ganz im Endlichen gelegenes Gebiet; seine Begrenzungskurve C bestehe aus einem einzigen regulären analytischen Zuge; d. h. die rechtwinkligen Koordinaten x, y der Kurve C lassen sich so durch einen reellen Parameter p ausdrücken

$$x = \varphi(p) \text{ und } y = f(p),$$

dass in einer Umgebung jedes Wertes p_0, dem ein Punkt x_0 y_0 der Kurve C entspricht, die Entwicklungen gelten

$$x = \varphi(p) = x_0 + \varphi'(p_0)(p - p_0) + \frac{1}{2!}\varphi''(p_0)(p - p_0)^2 + \cdots,$$

$$y = f(p) = y_0 + f'(p_0)(p - p_0) + \frac{1}{2!}f''(p_0)(p - p_0)^2 + \cdots,$$

wobei aber $\varphi'(p_0)$ und $f'(p_0)$ nicht beide zugleich verschwinden; diese Kurve wird einen einzigen glatten geschlossenen Linienzug bilden ohne Doppelpunkt. Unter dieser Voraussetzung beweist Faber folgenden Satz:

Jede in S reguläre analytische Funktion $F(z)$ lässt sich daselbst auf *eine* Weise durch eine Reihe

$$\sum_0^\infty {}_\nu a_\nu P_\nu(z)$$

darstellen; $P_0(z)$, $P_1(z)$, $P_2(z)$, ... bedeutet dabei eine unendliche Reihe von Polynomen, wobei der jeweilige Index den Grad des Polynoms angibt; und zwar soll die Beschaffenheit der Polynome nur von dem betrachteten Regularitätsbereiche S, dagegen die a_ν von der besonderen Wahl der zu entwickelnden Funktion abhängen.

Eine solche polynomische Entwicklung ist z. B. die Taylor'sche Reihe, wenn S ein Kreis ist.

Um diesen Satz zu beweisen, bildet man das unendliche Gebiet S' ausserhalb des Gebietes S konform auf das Innere des Einheitskreises in der Ebene der komplexen Variabeln τ ab, und zwar derart, dass dem Punkte $z = \infty$ der Punkt $\tau = 0$ entspricht, was durch die Funktion

$$\tau = \chi(z)$$

besorgt werden möge; dann entspricht dem Kreise $|\tau| = 1$ die Kurve C in der z-Ebene. Die Funktion $\chi(z)$ existiert stets und ist eindeutig bestimmt, wenn man noch einem beliebigen Punkte auf C einen beliebigen Punkt auf dem Kreise $|\tau| = 1$ zuordnet. Ist ω eine positive reelle Zahl, und zwar $\omega < \omega_1$, wo $\omega_1 > 1$ ist und später noch näher bestimmt wird, dann entsprechen den Kreisen $|\tau| = \omega$ geschlossene Kurven C_ω in der z-Ebene, von denen jede aus einem einzigen regulären analytischen Kurvenzuge besteht. Da nach Voraussetzung die Randkurve C von S', die zugleich auch Randkurve von S ist, aus einem einzigen regulären analytischen Zuge besteht, so lässt sich bekanntlich die Abbildungsfunktion $\chi(z)$ über den ganzen Rand C analytisch fortsetzen und da in diesem Fall in jedem Punkte von C $\chi'(z)$ von Null verschieden ist, so lässt sich eine Zahl $\omega > 1$, so nahe bei 1 angeben, dass auch noch das ganze Gebiet ausserhalb C_ω durch dieselbe Funktion $\tau = \chi(z)$ eindeutig und konform auf das Innere des Kreises $|\tau| = \omega$ abgebildet wird. Besteht nun diese Kurve C_ω wieder aus einem einzigen regulären analytischen Zuge, so lässt sich die Funktion $\chi(z)$ auch noch über die ganze Kurve C_ω hinaus analytisch fortsetzen; es sei nun ω_1 der grösste Wert von ω, so dass durch die Funktion $\tau = \chi(z)$ das Äussere der Kurve C_{ω_1} noch eindeutig und konform auf das Innere des Kreises $|\tau| = \omega_1$ abgebildet wird, so dass für jede Zahl $\omega > \omega_1$ dies nicht mehr zutrifft. Die Funktion $\tau = \chi(z)$ besitzt dann auf der Kurve C_{ω_1} einen singulären Punkt. Nun ist nach einem Satze von H. Schwarz[1]) die Abbildungsfunktion in jedem Punkte ausserhalb C_{ω_1} von regulärem Verhalten und eindeutig umkehrbar, so dass die Umkehrfunktion $z = \psi(\tau)$ im Innern des Kreises K_{ω_1} sich regulär verhält bis auf den Punkt $\tau = 0$, wo sie einen einfachen Pol besitzt. Um diese letzte Behauptung leichter einsehen zu können, denke man sich die konforme Abbildung

$$z_1 = \frac{1}{z - z_0}$$

durchgeführt; dabei sei z_0 ein beliebiger Punkt im Innern von S. Dann entspricht dem Punkte $z = \infty$ der Punkt $z = 0$ und die Punkte des Gebietes S' und eines endlichen Gebietes S_1, das den Punkt

[1]) Mathem. Annalen, Band 57 (1903), „Polynomische Entwicklungen I.“ Anmerkung pg. 389.

$z = 0$ enthält und dessen Randkurve C_1 das Bild von C ist, stehen in umkehrbar eindeutiger Beziehung. Es sei nun

$$z_1 = \psi_1(\tau)$$

diejenige Funktion, die das Innere des Kreises $|\tau| = 1$ auf das Innere des Gebietes S_1 abbildet und zwar so, dass dem Punkte $\tau = 0$ der Punkt $z_1 = 0$ entspricht. Da die Abbildung konform sein soll, so kann die Funktion $\psi_1(\tau)$ im Punkte $\tau = 0$ offenbar nur eine einfache Nullstelle haben; somit ist

$$z_1 = \tau \psi_1^*(\tau),$$

wo wegen der Eindeutigkeit der Abbildung $\psi_1^*(\tau)$ in keinem innern Punkte des Einheitskreises verschwinden kann; z_1 hat also daselbst die Darstellung

$$z_1 = \tau e^{\Phi(\tau)}.$$

Einem Kreise $|\tau| = \omega > 1$ entspricht offenbar eine Kurve C_{1_ω}, die die Kurve C_1 einschliesst und für welche der Umlaufssinn derselbe ist, wie in der τ-Ebene. Führt man vermöge der Abbildung $z_1 = \dfrac{1}{z - z_0}$ die frühere Variable z wieder ein, so entsprechen offenbar den Kurven C_{1_ω} in der z_1-Ebene, wo $\omega > 1$, Kurven C_ω in der z-Ebene, die alle innerhalb der Kurve C verlaufen und für welche der Umlaufssinn entgegengesetzt ist demjenigen für die Kurven C_{1_ω}, also auch entgegengesetzt demjenigen für die Kreise $|\tau| = \omega$. Wir erhalten dann

$$z = z_0 + \frac{1}{\tau} e^{-\Phi(\tau)},$$

woraus denn die Darstellung folgt

$$z = \psi(\tau) = \frac{a}{\tau} + \mathfrak{P}(\tau);$$

hier bedeutet a eine Konstante und $\mathfrak{P}(\tau)$ eine nach positiven Potenzen von τ fortschreitende Reihe, die für alle $|\tau| < \omega_1$ konvergiert, da die ursprüngliche Funktion $\tau = \chi(z)$ ausserhalb C_{ω_1} ausnahmslos regulär ist; $z = \psi(\tau)$ ist die Umkehrfunktion von $\tau = \chi(z)$ und bildet das Innere des Kreises $|\tau| = \omega_1$ konform ab auf das Äussere der Kurve C_{ω_1}.

Ist $F(z)$ eine innerhalb des Gebietes S reguläre analytische Funktion, so gilt

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{F(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

für jeden Punkt z, der von der doppelpunktslosen Kurve C', die innerhalb S verläuft, eingeschlossen wird. Statt C' kann man eine der Kurven C_ω wählen, wo $1 < \omega < \omega_1$ ist. Indem man in dem Integral die Substitution einführt $z = \psi(\tau)$, geht es über in

$$F(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{K_\omega} F[\psi(\tau)] \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau) - z} d\tau, \tag{6}$$

wo das Integral im positiven Sinn über den Kreis K_ω zu nehmen ist und wo $\psi'(\tau) = \frac{d\psi(\tau)}{d\tau}$ bedeutet. Der Faktor

$$\frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau) - z}$$

bildet die erzeugende Funktion der Polynome $P_\nu(z)$. Entwickelt man diese Funktion nach Potenzen von τ, so erweist sich der Koëffizient der Potenz τ^ν als ein Polynom in z vom Grade $(\nu + 1)$. Es hat nämlich $\frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau) - z}$ die Darstellung

$$\frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau) - z} = \frac{-\frac{a}{\tau^2} + \mathfrak{P}'(\tau)}{\frac{a}{\tau} + \mathfrak{P}(\tau) - z} = -\frac{1}{\tau} + \frac{\tau \mathfrak{P}'(\tau) + \mathfrak{P}(\tau) - z}{a + \tau \mathfrak{P}(\tau) - \tau z}.$$

Ist z ein Punkt innerhalb C_ω und lässt man nur solche Werte τ zu, die der Bedingung genügen $|\tau| < \omega$, dann ist jedenfalls

$$\psi(\tau) - z = \frac{a + \tau \mathfrak{P}(\tau) - \tau z}{\tau}$$

von Null verschieden; da zudem Zähler und Nenner des zweiten Gliedes rechterhand in der vorigen Gleichung im Innern des Kreises $|\tau| = \omega$ sich regulär verhalten, so lässt sich die erzeugende Funktion in der Form schreiben

$$\frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau) - z} = -\frac{1}{\tau} + \mathfrak{P}^*(\tau),$$

wobei der Kreis $|\tau = \omega$ Konvergenzkreis der Reihe $\mathfrak{P}^*(\tau)$ ist. Um die Koëffizienten von $\mathfrak{P}^*(\tau)$ zu bestimmen, entwickelt man den Ausdruck

$$\frac{1}{a + \tau\,\mathfrak{P}(\tau) - \tau z}$$

nach Potenzen von τ; man kann zunächst folgende Reihenentwicklung ansetzen, die für kleine Werte von τ gültig ist:

$$\frac{1}{a + \tau\,\mathfrak{P}(\tau) - \tau z} = \frac{1}{a} + \tau\frac{(z - \mathfrak{P}(\tau))}{a^2} + \tau^2\frac{(z - \mathfrak{P}(\tau))^2}{a^3} + \cdots + \frac{\tau^\nu (z - \mathfrak{P}(\tau))^\nu}{a^{\nu+1}} + \cdots;$$

daraus erkennt man, dass im Koëffizient von τ^ν keine höhere Potenz von z vorkommt, als die ν^{te}, diese aber auch sicher vorkommt; denn die Potenz τ^ν kommt nur in den $(\nu+1)$ ersten Gliedern vor, und die höchste Potenz von z, die in diesen Gliedern vorkommt, ist z^ν. Entwickelt man also den Ausdruck

$$\frac{\tau\,\mathfrak{P}'(\tau) + \mathfrak{P}(\tau) - z}{a + \tau\,\mathfrak{P}(\tau) - \tau z}$$

nach Potenzen von τ, so ist der Koëffizient von τ^ν ein Polynom vom Grade $(\nu+1)$; es möge mit $P_{\nu+1}(z)$ bezeichnet werden. Demnach erhält man für

$$\frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau) - z} + \frac{1}{\tau} = \sum_0^\infty{}_\nu\, P_{\nu+1}(z)\cdot\tau^\nu;\quad |\tau| < \omega,\ z \text{ innerhalb } C_\omega. \tag{7}$$

Diese Reihe konvergiert gleichmässig für alle $|\tau| < \omega$, wenn z irgend ein bestimmter Punkt ist innerhalb C_ω; es ist auch noch zu zeigen, dass sie als Funktion von z betrachtet gleichmässig konvergiert für alle z innerhalb C_ω. Ist G das Maximum des absoluten Betrages der Grösse auf der linken Seite von (7) für die betrachteten Werte von z und τ, dann gilt folgende Abschätzungsformel

$$|P_\nu(z)| < \frac{G}{\omega^{\nu-1}}$$

und daraus ergibt sich

$$\lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|P_\nu(z)|} = g < \frac{1}{\omega}.$$

Offenbar lässt sich stets eine positive Zahl ε so klein bestimmen, dass auch

$$g+\varepsilon<\frac{1}{\omega}\text{ und somit }\omega(g+\varepsilon)=q<1$$

ist. Nun ist von einer gewissen Zahl m ab für alle $\nu \geqq m$

$$\sqrt[\nu+1]{|P_{\nu+1}(z)|}<g+\varepsilon;$$

multipliziert man mit dieser die Ungleichung $|\tau|<\omega$ seitenweise, so erhält man

$$\sqrt[\nu+1]{|P_{\nu+1}(z)|}\cdot|\tau|<\omega(g+\varepsilon)=q,$$

so dass man zu folgender Abschätzung gelangt

$$\sum_{m}^{\infty}\nu\left|P_{\nu+1}(z)\cdot\tau^{\nu}\right|<\frac{1}{\omega}\frac{q^{m}}{1-q},$$

wobei die Grösse rechterhand jedenfalls eine endliche Zahl ist. Da diese Ungleichung für jedes z innerhalb C_ω gültig ist, so folgt daraus die gleichmässige Konvergenz der Reihe $\sum_{0}^{\infty}\nu\,P_{\nu+1}(z)\cdot\tau^{\nu}$ als Funktion von z innerhalb C_ω und $|\tau|<\omega$. Setzt man die Reihe für $\frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)-z}$ in dem Integral (6) ein, so darf man gliedweise integrieren, wenn man noch beachtet, dass man als Integrationsweg einen beliebigen Kreis $K_{\omega'}$ zwischen K_ω und dem Einheitskreis wählen kann. Daraus entspringt für $F(z)$ die folgende Darstellung

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{K_{\omega'}}F[\psi(\tau)]\frac{d\tau}{\tau}-\frac{1}{2\pi i}\int_{K_{\omega'}}F[\psi(\tau)]\,d\tau\cdot P_1(z)-$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{K_{\omega'}}F[\psi(\tau)]\,\tau d\tau\cdot P_2(z)-\cdots, \qquad (8)$$

die die Form hat

$$F(z)=\sum_{0}^{\infty}\nu\,a_\nu P_\nu(z).$$

Diese Entwicklung konvergiert für jeden Punkt innerhalb C_ω gleichmässig; da nun einerseits ω stets so nahe bei 1 gewählt werden kann, dass ein beliebiger Punkt z, der innerhalb C liegt, auch im Innern von C_ω liegt und da andererseits der Integrationsweg $K_{\omega'}$ beliebig nahe beim Einheitskreis gewählt werden kann, so folgt daraus, dass die Darstellung (8) für alle Punkte z, die im Innern von C, also im Gebiete S liegen, gleichmässig konvergiert.

Damit ist die Richtigkeit des am Anfang dieses Paragraphen aufgestellten Satzes erwiesen, abgesehen von der Eindeutigkeit, die sich aber in den folgenden Entwicklungen ergeben wird.

Wie in der Theorie der Potenzreihen, so existieren für die Reihen, die nach den Polynomen $P_\nu(z)$ fortschreiten, analoge Sätze, die Faber in seiner früher erwähnten Abhandlung bewiesen hat, und deren Beweis hier kurz angegeben werden möge. Es sind die folgenden Sätze:

I. Jede innerhalb einer Kurve C_ω $(0 < \omega < \omega_1)$ reguläre analytische Funktion $F(z)$ lässt sich daselbst in eine polynomische Reihe $\sum_0^\infty \nu\, a_\nu P_\nu(z)$ entwickeln, die innerhalb C_ω gleichmässig konvergiert.

II. Die Reihe $\sum_0^\infty \nu\, a_\nu P_\nu(z)$ definiert eine innerhalb C_ω reguläre analytische Funktion, wenn $\lim_{\nu=\infty}\sup \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = \omega < \omega_1$ ist; ausserhalb C_ω divergiert die Reihe.

III. Die Entwicklung einer innerhalb C_ω regulären analytischen Funktion nach den Polynomen $P_\nu(z)$ ist nur auf eine Weise möglich.

IV. Diejenige Funktion, die durch die Reihe $\sum_0^\infty \nu\, a_\nu P_\nu(z)$ dargestellt wird, falls $\lim_{\nu=\infty}\sup \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = \omega < \omega_1$ ist, besitzt auf C_ω mindestens einen singulären Punkt.

V. Die innerhalb C_ω konvergente Reihe $\sum_0^\infty \nu\, a_\nu P_\nu(z)$ darf gliedweise differenziert werden.

VI. Eine mit willkürlichen Koëffizienten angesetzte Reihe $\sum_0^\infty \nu\, a_\nu P_\nu(z)$, deren Koëffizienten nur der Bedingung genügen $\lim.\ sup._{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = \omega < \omega_1$, besitzt die Kurve C_ω zur natürlichen Grenze.

Es ist zu beachten, dass die Polynome dieselben sind für jedes Gebiet, das durch irgend eine der Kurven C_ω begrenzt wird, wenn ω zwischen den Grenzen $0 < \omega < \omega_1$ liegt; denn jede dieser Kurven C_ω entspricht zufolge der Beziehung $z = \psi(\tau)$ einem Kreise $|\tau| = \omega$. Sei $F(z)$ eine innerhalb C_ω reguläre Funktion; dann lässt sich stets eine Grösse ω' so bestimmen, dass $\omega < \omega' < \omega_1$; dann verläuft die Kurve $C_{\omega'}$ zwischen C_ω und C_{ω_1}, jedenfalls innerhalb C_ω. Man kann nun genau wie früher beim Falle $C_{\omega=1} \equiv C$ schliessen; $F(z)$ lässt sich darstellen durch das Integral

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\omega'}} \frac{F(\xi)}{\xi - z}\, d\xi;$$

durch Einführung der Substitution $z = \psi(\tau)$ bekommt man

$$F(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{K_{\omega'}} F[\psi(\tau)] \cdot \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau) - z}\, d\tau;$$

da aber z ein Punkt innerhalb $C_{\omega'}$ ist, so lässt sich der Ausdruck $\frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau) - z}$ wie früher in die Reihe

$$\frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau) - z} = -\frac{1}{\tau} + \sum_0^\infty \nu\, P_{\nu+1}(z) \cdot \tau^\nu$$

entwickeln, die im Kreisringe $0 < |\tau| < \omega'$ gleichmässig konvergiert und deshalb beim Eintragen in das Integral gliedweise integriert werden kann. Da aber der Integrand im Kreisring zwischen $K_{\omega'}$ und

K_ω regulären Verhaltens ist, so kann ω' beliebig nahe bei ω gewählt werden, derart, dass auch die Kurve $C_{\omega'}$ beliebig nahe bei C_ω verläuft, so dass die Darstellung

$$F(z)=\sum_0^\infty \nu\, a_\nu P_\nu(z), \quad \text{wo} \quad a_\nu=-\frac{1}{2\pi i}\int_{K_{\omega'}} F[\psi(\tau)]\,\tau^{\nu-1}d\tau,$$

für alle z innerhalb C_ω gleichmässig konvergiert. Über die Divergenz der Reihe lässt sich zunächst keine bestimmte Aussage machen; es sei hier nur so viel bemerkt, dass die Reihe auch noch in Punkten z ausserhalb C_ω konvergieren kann, wenn auf C_ω kein singulärer Punkt von $F(z)$ liegt.

Der Beweis des zweiten Satzes stützt sich auf die beiden Ungleichungen

$$\begin{aligned} &\lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|P_\nu(z)|} < \frac{1}{\omega}, \text{ falls } z \text{ ein Punkt innerhalb } C_\omega, \\ &\lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|P_\nu(z)|} > \frac{1}{\omega}, \text{ falls } z \text{ ein Punkt ausserhalb } C_\omega, \end{aligned} \tag{9}$$

wovon die letzte noch erst bewiesen werden muss. Ist also z ein Punkt ausserhalb C_ω, dann besitzt der Ausdruck $\left(\frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)-z}-\frac{1}{\tau}\right)$ im Innern des Kreises $|\tau|=\omega$ einen singulären Punkt, so dass seine Reihenentwicklung $\sum_0^\infty \nu P_{\nu+1}(z)\cdot\tau^\nu$ jedenfalls nicht für alle $|\tau|<\omega$ konvergieren kann. Es kann somit nicht die Ungleichung gelten $|P_\nu(z)| \leqq \frac{G}{\omega^{\nu-1}}$, wo G eine endliche positive Zahl bedeutet; denn daraus würde die Konvergenz der Reihe folgen für alle $|\tau|<\omega$. Deshalb ist notwendigerweise für alle ν von einer gewissen Zahl m ab

$$|P_\nu(z)| > \frac{G}{\omega^{\nu-1}}$$

und daraus folgt

$$\lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|P_\nu(z)|} > \frac{1}{\omega}, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Ist $\sum_{0}^{\infty} \nu\, a_\nu P_\nu(z)$ die vorgelegte Reihe und ist

$$\lim_{\nu=\infty} \sup \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = \omega < \omega_1 ,$$

wie es der Satz voraussetzt, so kann man zu jeder noch so kleinen positiven Grösse ε eine ganze positive Zahl m_1 angeben, so dass

$$\sqrt[\nu]{|a_\nu|} < \omega + \varepsilon , \text{ für alle } \nu \geqq m_1. \tag{10}$$

Auf Grund der ersten der beiden Ungleichungen (9) lässt sich eine ganze positive Zahl m_2 so bestimmen, dass

$$\sqrt[\nu]{|P_\nu(z)|} < r < \frac{1}{\omega} , \text{ für alle } \nu \geqq m_2 ; \tag{11}$$

dann ist auch $\frac{1}{r} > \omega$, und indem man die vorhin angegebene Zahl ε so klein wählt, dass auch

$$\frac{1}{r} > \omega + \varepsilon ,$$

so folgt daraus

$$1 > r(\omega + \varepsilon) = q .$$

Bezeichnet man mit m die grössere der beiden Zahlen m_1 und m_2, so erhält man durch seitenweise Multiplikation der Ungleichungen (10) und (11)

$$\sqrt[\nu]{|a_\nu P_\nu(z)|} < q , \ \nu \leqq m$$

und daraus folgert man die Ungleichung

$$\sum_{m}^{\infty} \nu \left| a_\nu P_\nu(z) \right| < \frac{q^m}{1-q} ,$$

d. h. die Summe $\sum_{0}^{\infty} \nu\, a_\nu P_\nu(z)$ konvergiert absolut und gleichmässig für alle z innerhalb C_ω und stellt deshalb eine daselbst reguläre analytische Funktion dar.

Um die Divergenz der Reihe $\sum_{0}^{\infty} {}_{\nu} a_\nu P_\nu(z)$ ausserhalb C_ω zu beweisen, dient die zweite Ungleichung von (9). Es lässt sich offenbar wieder eine Zahl r so bestimmen, dass für alle ν von einer gewissen Zahl ab die Ungleichung gilt

$$\sqrt[\nu]{|P_\nu(z)|} > r > \frac{1}{\omega}, \quad z \text{ ausserhalb } C_\omega.$$

Da ferner $\underset{\nu=\infty}{lim.\ sup.} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = \omega$ ist, so gibt es (nämlich auf Grund der Definition des limes superior) eine unendlich grosse Anzahl von Gliedern für die

$$\sqrt[\nu]{|a_\nu|} > \omega - \varepsilon.$$

Von nun an gestaltet sich der Beweis ähnlich wie im vorigen Fall, so dass man auf die Ungleichung stösst

$$\sqrt[\nu]{|a_\nu P_\nu(\bar{z})|} > p,$$

wo p eine positive Zahl bedeutet, $p > 1$. Es kann deshalb $\underset{\nu=\infty}{lim.}\ a_\nu P_\nu(z)$ nicht verschwinden. Daraus schliesst man auf die Divergenz der fraglichen Reihe für alle z ausserhalb C_ω.

In dem Falle, wo $\omega \geqq \omega_1$ ist, lässt sich über Konvergenz und Divergenz der Reihe $\sum_{0}^{\infty} {}_{\nu} a_\nu P_\nu(z)$ nichts aussagen.

Um die Eindeutigkeit einer solchen Entwicklung zu beweisen, bedarf es einer Hilfsbetrachtung; es handelt sich darum, die Form des Ausdrucks zu finden, wenn man im Polynom $P_\nu(z)$ die Substitution $z = \psi(t)$ macht; man erhält dann die für das streifenförmige Gebiet zwischen C_ω und C_{ω_1} gültige Darstellung.

$$P_\nu(z) = -\frac{1}{t^\nu} + \mathfrak{P}_\nu(t).$$

Zu diesem Zwecke betrachtet man den Ausdruck

$$\frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau) - \psi(t)} - \frac{1}{\tau - t}, \tag{12}$$

worin τ und t als zwei von einander unabhängige Variable aufzufassen sind. Gibt man hierin τ einen beliebigen aber festen Wert, der der Bedingung $0 < |\tau| < \omega_1$ genügt, so ist der Ausdruck (12) nur eine Funktion von t, das der Ungleichung genügen soll $|t| < \omega_1$. Fasst man zunächst die Differenz

$$\psi(\tau) - \psi(t) = \frac{a}{\tau} - \frac{a}{t} + \mathfrak{P}(\tau) - \mathfrak{P}(t)$$

ins Auge und setzt man

$$\mathfrak{P}(\tau) = a_0 + a_1 \tau + a_2 \tau^2 + a_3 \tau^3 + \cdots,$$

so ergibt sich für

$$\mathfrak{P}(\tau) - \mathfrak{P}(t) = (\tau - t)\{a_1 + a_2(\tau + t) + a_3(\tau^2 + \tau t + t^2) + \cdots\} = (\tau - t)\,\mathfrak{P}^*(\tau, t).$$

Es ist somit

$$\psi(\tau) - \psi(t) = (\tau - t) \cdot \left\{ \frac{a}{\tau t} + \mathfrak{P}^*(\tau, t) \right\};$$

wegen der Eindeutigkeit der Abbildung $z = \psi(\tau)$ ist $t = \tau$ die einzige Nullstelle der Differenz $\psi(\tau) - \psi(t)$, so dass der zweite Faktor der rechten Seite für kein t in K_{ω_1} und $0 < |\tau| < \omega_1$ verschwinden kann. Beachtet man noch, dass

$$\psi'(\tau) = -\frac{a}{\tau^2} + \mathfrak{P}'(\tau)$$

ist, so erhält man

$$\frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau) - \psi(t)} - \frac{1}{\tau - t} = \frac{\frac{-a}{\tau^2} + \mathfrak{P}'(\tau) - \left\{\frac{-a}{\tau t} + \mathfrak{P}^*(\tau, t)\right\}}{(\tau - t)\left\{\frac{-a}{\tau t} + \mathfrak{P}^*(\tau, t)\right\}}.$$

Wegen der Identität

$$\mathfrak{P}^*(\tau, \tau) \equiv \mathfrak{P}'(\tau)$$

und da die Differenz

$$\mathfrak{P}^*(\tau, \tau) - \mathfrak{P}^*(\tau, t) = (\tau - t)\,\overline{\mathfrak{P}^*}(\tau, t)$$

ist, so nimmt der Ausdruck (12) die Gestalt an

$$\frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau) - \psi(t)} - \frac{1}{\tau - t} = -\frac{1}{\tau} + t\,\frac{\tau\,\overline{\mathfrak{P}^*}(\tau, t) + \mathfrak{P}^*(\tau, t)}{-a + \tau\, t\,\mathfrak{P}^*(\tau, t)}.$$

Daraus erhellt sofort, dass

$$\frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau) - \psi(t)} - \frac{1}{\tau - t} + \frac{1}{\tau}$$

regulär ist für alle τ im Innern von K_{ω_1}, also wenn

$$|\tau| < \omega_1 \text{ und } |t| < \omega_1.$$

Man kann diesen Ausdruck in eine nur positive Potenzen von t und τ enthaltende Reihe entwickeln, die konvergent ist für alle $|\tau| < \omega_1$ und $|t| < \omega_1$ und die Form hat

$$\sum_0^\infty {}_\nu \mathfrak{P}_{\nu+1}(t)\,\tau^\nu;$$

so dass man die Darstellung erhält:

$$\frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)-\psi(t)} = -\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau - t} + \sum_0^\infty {}_\nu \mathfrak{P}_{\nu+1}(t)\,\tau^\nu.$$

Macht man noch die Voraussetzung, es sei stets $t > \tau$, dann lässt sich $\frac{1}{\tau - t}$ in eine nach steigenden Potenzen von τ fortschreitende Reihe entwickeln; dadurch gelangt man zu folgender Umformung

$$\frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)-\psi(t)} = -\frac{1}{\tau} + \sum_0^\infty {}_\nu \left\{ -\frac{1}{t^{\nu+1}} + \mathfrak{P}_{\nu+1}(t) \right\} \tau^\nu;$$

da nun t nur ein Punkt innerhalb des Kreises K_{ω_1} sein kann, so ist der Punkt $z = \psi(t)$ ausserhalb C_{ω_1}, und es gilt die Beziehung

$$\frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)-z} = -\frac{1}{\tau} + \sum_0^\infty {}_\nu \left\{ -\frac{1}{t^{\nu+1}} + \mathfrak{P}_{\nu+1}(t) \right\} \tau^\nu;$$

$$z \text{ ausserhalb } C_{\omega_1},\ |\tau| < |t| < \omega_1.$$

Geht man wieder zurück auf die Definitionsgleichung (7) der Polynome $P_\nu(z)$, nämlich

$$\frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)-z} = -\frac{1}{\tau} + \sum_0^\infty {}_\nu P_{\nu+1}(z)\,\tau^\nu, \text{ wo } z \text{ innerhalb } C_\omega,\ |\tau| < \omega,$$

so müssen die Darstellungen übereinstimmen im gemeinsamen Streifen zwischen C_ω und C_{ω_1}. Wegen der Eindeutigkeit der Potenzreihenentwicklung müssen die Koëffizienten gleich hoher Potenzen von τ übereinstimmen für alle $\omega < t < \omega_1$; dadurch gelangt man zur angekündigten Darstellung

$$P_\nu(z) = -\frac{1}{t^\nu} + \mathfrak{P}_\nu(t), \quad z \text{ zwischen } C_\omega \text{ und } C_{\omega_1}, \omega < |t| < \omega_1 . \quad (13)$$

Wir nehmen an, es existieren für eine innerhalb C_ω reguläre analytische Funktion zwei verschiedene Potenzreihenentwicklungen,

$$\sum_0^\infty \nu\, a_\nu P_\nu(z) \text{ und } \sum_0^\infty \nu\, a'_\nu P_\nu(z),$$

und zeigen, dass daraus für alle Zahlen ν die Gleichheit folgt $a_\nu = a'_\nu$. Beschränkt man z auf das Gebiet zwischen C_ω und C_{ω_1}, so erhält man unter Benützung der Relation (13) eine für alle $\omega < |t| < \omega_1$ identische Gleichung

$$\sum_0^\infty \nu a_\nu \left\{ -\frac{1}{t^\nu} + \mathfrak{P}_\nu(t) \right\} = \sum_0^\infty \nu\, a'_\nu \left\{ -\frac{1}{t^\nu} + \mathfrak{P}_\nu(t) \right\}.$$

Da die beiden Reihen jedenfalls für alle t von gleichem zwischen ω und ω_1 liegendem absolutem Betrage gleichmässig konvergieren, so kann man nach dem Weierstrass'schen Doppelreihensatz die linke und die rechte Seite der Gleichung je in eine Laurent'sche Reihe zusammenfassen. Wegen der identischen Übereinstimmung beider Seiten und wegen der Eindeutigkeit der Laurent'schen Entwicklung folgt

$$a_\nu = a'_\nu.$$

Der Beweis des unter IV. erwähnten Satzes ergibt sich nun sehr einfach. Die Reihe $\sum_0^\infty \nu\, a_\nu P_\nu(z)$, wo $\lim_{\nu=\infty} \sup \sqrt{|a_\nu|} = \omega > \omega_1$, divergiert bekanntlich ausserhalb C_ω und stellt eine im Innern von C_ω reguläre Funktion $F(z)$ dar. Würde nun auf C_ω kein singulärer Punkt von $F(z)$ liegen, so könnte man eine Kurve $C_{\omega'}$ angeben, die die Kurve C_ω umschliesst und keinen singulären Punkt von $F(z)$ einschliesst. $F(z)$ liesse sich dann in eine innerhalb $C_{\omega'}$ konvergente Reihe $\sum_0^\infty \nu\, a'_\nu P_\nu(z)$ entwickeln. Die beiden Reihen stimmen innerhalb C_ω identisch überein, woraus ersichtlich ist, dass $a_\nu = a'_\nu$

ist, wegen der Eindeutigkeit der Entwicklungen. Daraus würde folgen, dass auch die Reihe $\sum_0^\infty \nu\, a_\nu\, P_\nu(z)$ im Streifen zwischen C_ω und $C_{\omega'}$ konvergieren müsste, was ein Widerspruch ist.

Der I. Satz wäre nun vollständiger so auszusprechen:

Kann man durch einen singulären Punkt der Funktion $F(z)$ eine Kurve C_ω ziehen, wo $\omega < \omega_1$ ist, und schliesst die Kurve C_ω keinen singulären Punkt von $F(z)$ ein, so lässt sich $F(z)$ in eine innerhalb C_ω gleichmässig konvergente, ausserhalb C_ω divergente Reihe $\sum_0^\infty \nu\, a_\nu\, P_\nu(z)$ entwickeln.

Um die Aussage über die gliedweise Differentiation zu begründen, benützt man die Darstellung

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\omega} \frac{F(\xi)}{(\xi - z)^2}\, d\xi = -\frac{1}{2\pi i}\int_{K_\omega} F[\psi(\tau)]\, \frac{\psi'(z)}{(\psi(\tau) - z)^2}\, d\tau\ .$$

Es ist nur zu zeigen, dass in dem Ausdruck

$$\frac{\psi'(\tau)}{(\psi(\tau) - z)^2} = \frac{d}{dz}\left(\frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau) - z}\right) = \frac{d}{dz}\left(\sum_0^\infty \nu\, P_{\nu+1}(z)\, \tau^\nu\right) =$$

$$= \sum_0^\infty \nu\, \frac{d}{dz}\, P_{\nu+1}(z)\, \tau^\nu$$

die Summe rechterhand gleichmässig konvergiert für alle z innerhalb C_ω und τ auf K_ω. Dies kann etwa in der Weise gezeigt werden, dass man den für alle $|\tau| < \omega$ und z innerhalb C_ω regulären Ausdruck $\frac{\psi'(\tau)}{(\psi(\tau) - z)^2}$ in eine Reihe $\sum_0^\infty \nu\, Q_\nu(z)\, \tau_\nu$ entwickelt, deren gleichmässige Konvergenz für alle z im Innern von C_ω und $|\tau| < \omega$ ähnlich wie früher bewiesen werden kann; durch Integration lässt sich dann leicht die Identität $Q_\nu(z) \equiv \frac{d}{dz}\, P_{\nu+1}(z)$ feststellen.

Der Beweis des Satzes VI stützt sich auf den engen Zusammenhang, der zwischen den Singularitäten der Funktionen $F(z)$ und $\Phi(t)$ besteht, wenn

$$F(z) = \sum_0^\infty \nu\, a_\nu\, P_\nu(z) \text{ und } \Phi(t) = \sum_0^\infty \nu \frac{a_\nu}{t^\nu};$$

mit Benützung der Relation (13) kommt man zur Beziehung

$$F(z) = -\Phi(t) + \sum_0^\infty \nu\, a_\nu\, \mathfrak{P}_\nu(t),$$

falls man z auf das Gebiet zwischen C_ω und C_{ω_1} beschränkt. Setzt man $z_0 = \psi(t_0)$ und beachtet man, dass $\psi(t)$ in jedem Punkte t_0 auf K_ω sich regulär verhält, so gilt für eine gewisse Umgebung von t_0:

$$z - z_0 = \alpha_1 (t - t_0) + \alpha_2 (t - t_0)^2 + \cdots,$$

wobei $\alpha_1 = \psi'(t_0)$ auf jeden Fall nicht verschwinden kann, da die Konformität der Abbildung auch noch im Punkte t_0 besteht. Mit Hilfe der Weierstrass-Lagrange'schen Umkehrformel schliesst man dann für eine gewisse Umgebung von z_0:

$$t - t_0 = \beta_1 (z - z_0) + \beta_2 (z - z_0)^2 + \cdots.$$

Mit Hilfe dieser beiden letzten Reihen lässt sich folgern, dass wenn t_0 ein regulärer Punkt von $\Phi(t)$ ist, auch z_0 ein regulärer Punkt ist von $F(z)$ und umgekehrt, und dass die Singularitäten für $F(z)$ auf C_ω und von $\Phi(t)$ auf K_ω von derselben Natur sind. Ist z. B. $\Phi(t)$ längs dem ganzen Kreise K_ω singulär, dann ist auch $F(z)$ in jedem Punkte der Kurve C_ω singulär. Da aber eine mit willkürlichen Koëffizienten angesetzte Potenzreihe in jedem Punkte des Konvergenzkreises singulär ist,[1]) so muss auch $F(z)$ in jedem Punkte von C_ω singulär sein.

Schliesslich sei noch erwähnt, dass man mit Hilfe der hier entwickelten Theorie zeigen kann, dass eine Funktion $F(z)$ die in einem beliebigen endlichen einfachzusammenhängenden Gebiete S

---

[1]) G. Vivanti: Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen, pag. 411 und 412.

sich regulär verhält, in eine Reihe von Polynomen entwickelt werden kann, welche in jedem Gebiete, das ganz innerhalb S liegt, gleichmässig gegen $F(z)$ konvergiert; auch gelangt man mit denselben Hilfsmitteln zu dem Ergebnis von Mittag-Leffler, von dem in § 3 gesprochen wurde.

§ 5.

Über die Arbeit von G. Faber; Zusammenhang mit der Entwicklung nach Kugelfunktionen.

In diesem Paragraphen werden die Polynome $P_\nu(z)$ für den Fall, dass die Kurven C_ω Ellipsen sind, berechnet, um hernach noch über den Zusammenhang mit den Legendre'schen Polynomen zu reden. Die Funktion $z = \psi(\tau)$ heisst bei der Ellipse

$$z = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tau} + \tau\right);$$

sie bildet das Innere eines Kreises $|\tau| = \omega < 1$ konform ab auf das Äussere einer Ellipse mit den Brennpunkten ± 1 in der z-Ebene. Wegen der genauen Diskussion der Abbildung verweise ich auf § 6. Um die Polynome zu erhalten, hat man bekanntlich die folgende Funktion nach Potenzen von τ zu entwickeln:

$$f(\tau) = \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau) - z} + \frac{1}{\tau} = \frac{2\tau - 2z}{1 - 2\tau z + \tau^2} = \frac{1}{\tau - (z + \sqrt{z^2 - 1})} + \frac{1}{\tau - (z - \sqrt{z^2 - 1})};$$

da nun auf Grund der Definition der $P_\nu(z)$ die Gleichung besteht

$$P_\nu(z) = \frac{f^{(\nu)}_{(0)}}{(\nu)!},$$

so erhält man für

$$f^{(\nu-1)}_{(\tau)} = \frac{(-1)^{\nu-1}(\nu-1)!}{[\tau - (z + \sqrt{z^2-1})]^\nu} + \frac{(-1)^{\nu-1}(\nu-1)!}{[\tau - (z - \sqrt{z^2-1})]^\nu}$$

und daraus ergeben sich für die Polynome $P_\nu(z)$, die zu Ellipsen mit den Brennpunkten ± 1 gehören,

$$P_\nu(z) = -\left[(z - \sqrt{z^2-1})^\nu + (z + \sqrt{z^2-1})^\nu\right].$$

Dass dieser Ausdruck ein Polynom darstellt, kann man daran erkennen, dass beim Ausrechnen nach dem binomischen Satz, die

ungeraden Potenzen der Wurzel die einzigen sind, die die Wurzel wirklich noch enthalten; da aber diese in den beiden Gliedern entgegengesetztes Zeichen haben, so heben sie sich weg.

Es zeigt sich, dass die Legendre'schen Polynome, deren erzeugende Funktion

$$\frac{1}{\sqrt{1-2z\tau+\tau^2}} = 1 + \sum_{1}^{\infty} \nu X_\nu(z)\, \tau^\nu$$

ist, sich nicht unter die bis jetzt entwickelte Theorie der Polynome $P_\nu(z)$ subsummieren, sondern als Spezialfall allgemeiner Polynomenfolgen aufzufassen sind. In einer spätern Abhandlung [1]) erweitert Faber die Theorie der polynomischen Entwicklungen, indem er allgemeinere Polynomenfolgen aufstellt und untersucht, um die gewonnenen Resultate hernach auf Reihenentwicklungen nach Legendre'schen Polynomen anzuwenden.

Hier will ich mich nur auf die Angabe des Gedankengangs beschränken.

Zur Aufstellung allgemeinerer Polynomenfolgen benutzt Faber den Begriff der Hadamard'schen Transmutationen T_1 und T_2, die folgendermassen definiert sind: Durch die beiden Potenzreihen

$$f_1(z) = \sum_{0}^{\infty} \nu\, c_\nu z^\nu$$

$$f_2(z) = \sum_{0}^{\infty} \nu \frac{1}{c_\nu} z^\nu$$

sollen zwei Funktionen dargestellt werden, die die singuläre Stelle $z = 1$ haben, aber regulär und eindeutig bleiben solange z eine beliebige vom Punkte 1 bis zum Punkte ∞ gezogene Linie nicht überschreitet. Solche Funktionen würde man z. B. erhalten, wenn man $c_\nu = \binom{\alpha}{\nu}$ setzt, wo α keine positive ganze Zahl ist, oder auch für $f_1(z) = f_2(z) - \frac{1}{1-z} = \sum_{0}^{\infty} \nu z^\nu$. Ist nun $F(z)$ eine reguläre analytische

[1]) Polynomische Entwicklungen II, Math. Annalen 64 (1907).

Funktion, im Innern eines einfach zusammenhängenden Gebietes S, von dem nur vorausgesetzt wird, dass es den Nullpunkt einschliesst, dann wird nach einem Satz von Hadamard[1]) durch das Integral

$$F_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C F(\xi) f_1\left(\frac{z}{\xi}\right) \frac{d\xi}{\xi}$$

genommen über den Rand C von S, eine innerhalb S reguläre analytische Funktion $F_1(z)$ definiert; man sagt nun $F_1(z)$ entstehe aus $F(z)$ durch die Hadamard'sche Transmutation T_1. Ebenso wird durch das Integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C F_1(\xi) f_2\left(\frac{z}{\xi}\right) \frac{d\xi}{\xi}$$

eine innerhalb C reguläre analytische Funktion definiert und zwar ist es wieder $F(z)$; man wird also hier sagen: $F(z)$ geht aus $F_1(z)$ durch die Hadamard'sche Transmutation T_2 hervor. $F(z)$ und $F_1(z)$ haben dieselben singulären Stellen. Wählt man eine der früher mit C_ω bezeichneten Kurven als Kurve C, so kann man die innerhalb C_ω reguläre analytische Funktion $F(z)$ durch das folgende Integral darstellen:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\omega'}} F_1(\xi) f_2\left(\frac{z}{\xi}\right) \frac{d\xi}{\xi}, \quad \text{wo } \omega' > \omega \tag{14}$$

und wenn man darin wieder die Substitution macht $z = \psi(\tau)$, so erhält man

$$F(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{K_{\omega'}} F_1[\psi(\tau)] f_2\left(\frac{z}{\psi(\tau)}\right) \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} d\tau; \tag{15}$$

dann bildet der Ausdruck $f_2\left(\frac{z}{\psi(\tau)}\right) \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)}$ die erzeugende Funktion neuer Polynome $\rho_\nu(z)$, indem man ihn nach Potenzen von τ entwickelt und den Koëffizient der Potenz $\tau^{\nu-1}$ mit $\rho_\nu(z)$ bezeichnet. Es wird dann

---

[1]) Acta mathematica 22 (1898) pg. 56.

$$\Psi(z,\tau) = f_2\left(\frac{z}{\psi(\tau)}\right)\frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)} = \sum_0^\infty \nu\, p_\nu(z)\,\tau^{\nu-1} = \frac{1}{\tau}\sum_0^\infty \nu\, p_\nu(z)\,\tau^\nu.$$

Da die Reihe rechterhand gleichmässig konvergiert, so kann sie im Integral (15) eingesetzt, gliedweise integriert werden, so dass für $F(z)$ eine innerhalb C_ω gleichmässig konvergente Entwicklung von der Form

$$F(z) = \sum_0^\infty \nu\, a_\nu\, p_\nu(z)$$

entspringt. Auch hier lässt sich die Eindeutigkeit der Entwicklung beweisen; ferner gilt auch der Satz, dass eine Summe $\sum_0^\infty \nu\, a_\nu\, p_\nu(z)$ dann eine innerhalb C_ω reguläre analytische Funktion darstellt, wenn $\lim.\ \sup.\ \sqrt[\nu]{a_\nu} = \omega < \omega_1$ ist. Weiterhin zeigt sich, dass die $p_\nu(z)$ allgemeinere Polynome sind, als die $P_\nu(z)$, wegen der grossen Mannigfaltigkeit von $f_1(z)$ und $f_2(z)$; letztere bilden einen Spezialfall der ersten, wenn man

$$f_1\left(\frac{z}{\xi}\right) = f_2\left(\frac{z}{\xi}\right) = \frac{1}{1-\frac{z}{\xi}}$$

setzt; denn in diesem Fall ist

$$F_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{\omega'}} F(\xi)\frac{1}{1-\frac{z}{\xi}}\,d\xi = F(z).$$

Es geht Integral (15) in diesem Fall über in

$$F(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{K_{\omega'}} F[\psi(\tau)]\,\frac{1}{1-\frac{z}{\psi(\tau)}}\,\frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)}\,d\tau =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{K_{\omega'}} F[\psi(\tau)]\,\frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)-z}\,d\tau$$

und die erzeugende Funktion $\Psi(z, \tau)$ der $p_\nu(z)$ geht in die erzeugende Funktion der $P_\nu(z)$ über.

Noch weit allgemeinere Polynome erhält man, indem man von dem Ausdruck

$$\Psi(z, \tau)\, \tau\, \mathfrak{P}(\tau)$$

als erzeugende Funktion ausgeht, wobei $\mathfrak{P}(\tau)$ eine willkürliche Potenzreihe ist,

$$\mathfrak{P}(\tau) = c_0 + c_1 \tau + c_2 \tau^2 + \cdots,$$

die nur für $|\tau| < \omega$, konvergieren muss. Bezeichnet man die neuen Polynome mit $\pi_\nu(z)$, so gilt die Definitionsgleichung

$$\Psi(z, \tau)\, \tau\, \mathfrak{P}(\tau) = \sum_0^\infty \nu \pi_\nu(z)\, \tau^\nu$$

und durch Ausrechnung findet man

$$\pi_\nu(z) = c_0 p_\nu(z) + c_1 p_{\nu-1}(z) + c_2 p_{\nu-2}(z) + \cdots + c_\nu p_0(z).$$

Auch über Entwicklungen nach diesen Polynomen können ähnliche Aussagen gemacht werden. Ist nämlich $\lim_{\nu=\infty}.\ \sup.\ \sqrt[\nu]{a_\nu} = \omega < \omega_1$ so stellt die Reihe $\sum_0^\infty \nu\, a_\nu\, \pi_\nu(z)$ eine innerhalb C_ω reguläre analytische Funktion dar. Aber bei diesen Reihen tritt der Fall ein, dass es unter gewissen Umständen Nullentwicklungen gibt, so dass die unendliche Summe

$$0 \equiv \sum_0^\infty \nu\, a_\nu\, \pi\nu(z)$$

in z identisch verschwinden kann innerhalb einer Kurve der Schaar C_ω, ohne dass sämtliche a_ν verschwinden. Die Entwicklung einer Funktion $F(z)$ in eine Reihe $\sum_0^\infty \nu\, a_\nu\, \pi_\nu(z)$ wird also im Allgemeinen nicht eindeutig sein. Will man $F(z)$ nach den Polynomen $\pi_\nu(z)$ entwickeln, so schreibt man das Integral (15) in der Form

$$F(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{K_{\omega'}} \frac{F_1[\psi(\tau)]}{\tau\, \mathfrak{P}(\tau)} \left[f_2\left(\frac{z}{\psi(\tau)}\right) \frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)}\, \tau\, \mathfrak{P}(\tau) \right] d\tau,$$

wobei man Sorge zu tragen hat, dass man ω' so nahe bei ω wählt, dass zwischen den Kreisen K_ω und $K_{\omega'}$ keine Nullstelle von $\mathfrak{P}(\tau)$ liegt. Ersetzt man den in der eckigen Klammer stehenden Ausdruck durch die gleichmässig konvergente Reihe $\sum_0^\infty \nu\, \pi_\nu(z)\, \tau^\nu$, so erhält man durch gliedweise Integration

$$F(z) = \sum_0^\infty \nu - \frac{1}{2\pi i} \int_{K_{\omega'}} F_1[\psi(\tau)]\, \tau^{\nu-1} \frac{1}{\mathfrak{P}(\tau)}\, d\tau \cdot \pi_\nu(z).$$

Nun soll mit γ die dem absoluten Betrage nach kleinste Nullstelle von $\mathfrak{P}(\tau)$ bezeichnet werden, dann beweist Faber den folgenden Satz:

Eine Nullenentwicklung

$$0 \equiv \sum_0^\infty \nu\, a_\nu\, \pi_\nu(z)$$

existiert nicht, solange

$$\lim_{\nu=\infty}.\ \sup.\ \sqrt[\nu]{|a_\nu|} < |\gamma|\,.$$

Dieser Satz wird bei Entwicklungen nach Legendre'schen Polynomen Anwendung finden. Um diese Polynome zu erhalten, benützt man die Abbildungsfunktion

$$z = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tau} + \tau\right)$$

und wählt für

$$f_2\left(\frac{z}{\xi}\right) = \left(1 - \frac{z}{\xi}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\xi}\right) + \frac{1\cdot 3}{1\cdot 2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{z}{\xi}\right)^2 + \\ + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{z}{\xi}\right)^3 + \cdots.$$

Ist $F(z)$ innerhalb einer Ellipse C_ω regulär, so gilt nach (14)

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{\omega'}} \frac{F_1(\xi)}{\xi\sqrt{1-\frac{z}{\xi}}}\, d\xi = -\frac{1}{2\pi i}\int_{K_{\omega'}} \frac{F_1\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tau}+\tau\right)\right]}{\tau\sqrt{1-2\tau z+\tau^2}}\, \frac{\tau^2}{\sqrt{1+\tau^2}}\, d\tau = \\ = \sum_0^\infty \nu\, a'_\nu\, p_\nu(z);$$

hier ist die erzeugende Funktion der $p_\nu(z)$ die folgende

$$\Psi(z, \tau) = \frac{\tau^2 - 1}{\tau \sqrt{1 + \tau^2}} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\tau z + \tau^2}}.$$

Früher wurde als erzeugende Funktion der $\pi_\nu(z)$

$$\Psi(z, \tau)\, \tau\, \mathfrak{P}(\tau) = \sum_0^\infty \nu\, \pi_\nu(z)\, \tau^\nu$$

genommen; setzt man in diesem Fall $\mathfrak{P}(\tau) = \frac{\sqrt{1 + \tau_2}}{\tau^2 - 1}$, so ist für diese bestimmte Potenzreihe $\mathfrak{P}(\tau)$ der Ausdruck

$$\Psi(z, \tau)\, \tau\, \mathfrak{P}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\tau z + \tau^2}} = \sum_0^\infty \nu\, X_\nu\, \tau_\nu$$

die erzeugende Funktion der Legendre'schen Polynome X_ν. Man erhält also für $F(z)$ die folgende Entwicklung

$$F(z) = \sum_0^\infty \nu\, a_\nu\, X_\nu,$$

wobei

$$a_\nu = -\frac{1}{2\pi i} \int_{K_{\omega'}} \frac{F_1\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tau} + \tau\right)\right]}{\tau \sqrt{1 + \tau^2}} (\tau^2 \quad 1)\, d\tau\,.$$

Da die hier vorkommende Potenzreihe $\mathfrak{P}(\tau) = \frac{\sqrt{1 + \tau^2}}{\tau^2 - 1}$ keine Nullstelle hat für alle $|\tau| < 1$, so ist eine Nullentwicklung nicht möglich. Das Ergebnis lässt sich also folgendermassen aussprechen:

Jede innerhalb einer Ellipse mit den Brennpunkten ± 1 reguläre analytische Funktion $F(z)$ gestattet daselbst eine Darstellung durch eine Reihe

$$F(z) = \sum_0^\infty \nu\, a_\nu\, X_\nu$$

für welche $\lim.\ \sup._{\nu = \infty} \sqrt[\nu]{|a_\nu|}$ eine Zahl $\omega < 1$ ist. Setzt man $z = x + i\,y$, so reicht die Konvergenz bis zu der Ellipse, deren Gleichung

$$\frac{4x^2}{\left(\omega+\frac{1}{\omega}\right)^2}+\frac{4y^2}{\left(\omega-\frac{1}{\omega}\right)^2}=1$$

ist; ausserhalb dieser Ellipse findet Divergenz statt, auf ihr liegt mindestens ein singulärer Punkt von $F(z)$.

Kapitel III.

Polynomische Entwicklungen für speziell gewählte Gebiete, nämlich das Innere von Ellipsen und Cassini'schen Kurven, mit Berücksichtigung der Berechnung der Koëffizienten.

Währenddem im ersten Kapitel von der Existenz von polynomischen Entwicklungen die Rede war und jene Darlegungen noch sehr allgemeiner Natur waren, folgte im zweiten Kapitel eine Behandlung von Entwicklungen, die nach einer speziellen Klasse von Polynomen fortschreiten; es waren dies die Polynome $P_\nu(z)$, die durch die Gleichung

$$\frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)-z}+\frac{1}{\tau}=\sum_0^\infty \nu\, P_{\nu+1}(z)\,\tau^\nu$$

definiert wurden, wobei $z=\psi(\tau)$ das Innere des Einheitskreises auf das Äussere des gewählten Gebietes konform abbildet. Auch diese Entwicklungen weisen nach einer gewissen Richtung hin eine grosse Mannigfaltigkeit auf, da vom Rande C des gewählten im Endlichen liegenden Gebietes nur verlangt wird, dass er aus einem einzigen regulären analytischen Zuge bestehe, oder anders ausgedrückt, dass sich die Abbildungsfunktion $z=\psi(\tau)$ über den Kreis in der τ-Ebene, der das Bild des Randes C ist, analytisch fortsetzen lässt. Es ergab sich deshalb für die Koëffizienten der Entwicklung nach den Polynomen $P_\nu(z)$ ein Ausdruck, nämlich

$$a_\nu = -\frac{1}{2\pi i}\int_{K_\omega} F[\psi(\tau)]\,\tau^{\nu+1}\,d\tau, \tag{16}$$

welcher auch diese Mannigfaltigkeit erkennen lässt, weil die Funktion $\psi(\tau)$ im Integranden auftritt. Falls in diesem Integral (16) der Integrand eine leicht integrierbare Funktion ist, werden sich durch diese Formel die Koëffizienten a_ν auch leicht berechnen lassen; doch im allgemeinen wird diese Darstellung (16) zur Berechnung der a_ν nicht direkt verwendet werden können. Es erweist sich deshalb als notwendig andere Wege zu suchen, um für ein bestimmt gewähltes Gebiet polynomische Entwicklungen zu erhalten, deren Koëffizienten in einfacherer Weise bestimmt sind. Das wird auch der Hauptgegenstand der Betrachtungen in diesem Kapitel sein. Die bestimmt gewählten Gebiete werden hier durch das Innere von Cassini'schen Kurven gebildet; und zwar handelt es sich darum, eine gegebene analytische Funktion $F(z)$ in eine Reihe zu entwickeln, die nach beliebigen Polynomen fortschreitet, aber derart, dass die Reihe im Innern des gewählten Gebietes gleichmässig konvergiert, ausserhalb dagegen divergiert, und dass sich ihre Koëffizienten in leicht berechenbarer Form darstellen lassen.

§ 6.

Polynomische Entwicklungen für das Innere von Ellipsen nach E. Picard.

Wenn in diesem Paragraphen das von E. Picard[1]) angedeutete Verfahren für die Ableitung der Polynome $P_\nu(z)$ der Ellipse näher ausgeführt wird, so hat dies den Zweck, zu zeigen, dass die Koëffizienten einer für die Ellipse gültigen Entwicklung einer analytischen Funktion nach den Polynomen $P_\nu(z)$ sich auch als Koëffizienten der Laurent'schen Reihenentwicklung einer Funktion ergeben, die mit der darzustellenden Funktion $F(z)$ in einfacher Beziehung steht; andererseits bildet dieses Verfahren ein interessantes Beispiel, welches erkennen lässt, wie man auch auf anderm Wege für ein bestimmtes Gebiet, z. B. die Ellipse, die Polynome bestimmen kann, nach denen eine innerhalb dieser Ellipse reguläre analytische

[1]) Traité d'analyse, t. II. pg 317.

Funktion entwickelt werden kann. Das Hauptmittel liegt hier in der direkten Abbildung des Innern der Ellipse auf das Innere eines Kreisringes.

Es wird sich zunächst darum handeln, das Verhalten der Abbildungsfunktion

$$w = z + \sqrt{z^2 - 1}$$

in der z-Ebene genau zu kennen. Das einfachste ist ihre Umkehrfunktion zu bilden

$$z = \frac{w^2 + 1}{2w}$$

und von dieser ausgehend die Abbildung zu untersuchen. Die Zerlegung beider Seiten in Real- und Imaginärteil gibt folgende Beziehung zwischen den Koordinaten der Punkte z und w:

$$z = x + iy = \frac{(u+iv)^2+1}{2(u+iv)} = \frac{u^3+u+uv^2}{2(u^2+v^2)} + i\,\frac{u^2v+v^3-v}{2(u^2+v^2)}$$

woraus sich ergibt

$$x = \frac{u^2+v^2+1}{2(u^2+v^2)}\,u; \quad y = \frac{u^2+v^2-1}{2(u^2+v^2)}\,v\,.$$

Bedeutet r den absoluten Betrag und φ den Winkel von w, und führt man für u und v die Polardarstellung ein

$$u = r\cos\varphi, \quad v = r\sin\varphi \text{ und } w = re^{i\varphi},$$

so lauten die Beziehungen zwischen den rechtwinkligen Koordinaten von z und den Polarkoordinaten von w

$$x = \frac{r^2+1}{2r}\cos\varphi \text{ und } y = \frac{r^2-1}{2r}\sin\varphi\,. \tag{17}$$

Formen wir die Gleichungen so um, dass wir auf der einen Seite die Funktion von φ allein haben, quadrieren und addieren wir alsdann, so erhalten wir

$$\frac{x^2}{\left(\frac{r^2+1}{2r}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{r^2-1}{2r}\right)^2} = 1. \tag{18}$$

Diese Gleichung sagt: allen Kreisen $|w| = r = konst.$ in der w-Ebene entsprechen in der z-Ebene konfokale Ellipsen mit den Brennpunkten

$$\pm\sqrt{\left(\frac{r^2+1}{2r}\right)^2-\left(\frac{r^2-1}{2r}\right)^2}=\pm 1.$$

Es zeigt sich, dass den beiden Kreisen mit den Radien r und $\frac{1}{r}$ dieselbe Ellipse entspricht; denn setzt man in den Ausdrücken für die Quadrate der Halbaxen $\frac{1}{r}$ an Stelle von r, so bleiben sie unverändert. Setzt man

$$w = r\,e^{i\varphi} \text{ und } w' = \frac{1}{r}\,e^{-i\varphi},$$

so entspricht diesen beiden Punkten w und w' derselbe Punkt z, was man aus den Gleichungen (17) erkennt; denn setzt man in (17) an Stelle von r und φ resp. $\frac{1}{r}$ und $-\varphi$, so behalten sie denselben Wert. Lassen wir also φ sukzessive die Werte von $-\pi$ bis $+\pi$ durchlaufen, so macht der Punkt w auf dem Kreise mit dem Radius r im positiven Sinn und w' auf dem Kreise mit dem Radius $\frac{1}{r}$ im negativen Sinn einen vollständigen Umlauf und der Bildpunkt z durchläuft die entsprechende Ellipse einmal und zwar vollständig. Dem Kreise mit dem Radius $r = 1$ entspricht die Strecke $-1 \cdots +1$; denn nach den Formeln (17) ist für $r = 1$

$$x = \cos\varphi \text{ und } y = 0,$$

somit ist x in die Grenzen -1 und $+1$ eingeschlossen. Wir wollen noch die folgende Frage lösen: wenn der Punkt w sich auf einem Strahle vom Punkte $w = 0$ aus bewegt, auf welcher Linie bewegt sich dann sein Bild z? Der Winkel φ von w wird bei der Bewegung konstant sein, währenddem der absolute Betrag r alle positiven Zahlwerte durchläuft. Wir schreiben die Gleichungen (17) in der Form

$$\frac{x}{\cos\varphi}=\frac{r^2+1}{2r} \text{ und } \frac{y}{\sin\varphi}=\frac{r^2-1}{2r}$$

quadrieren und subtrahieren sie und werden erhalten

$$\frac{x^2}{\cos^2\varphi}-\frac{y^2}{\sin^2\varphi}=1; \tag{19}$$

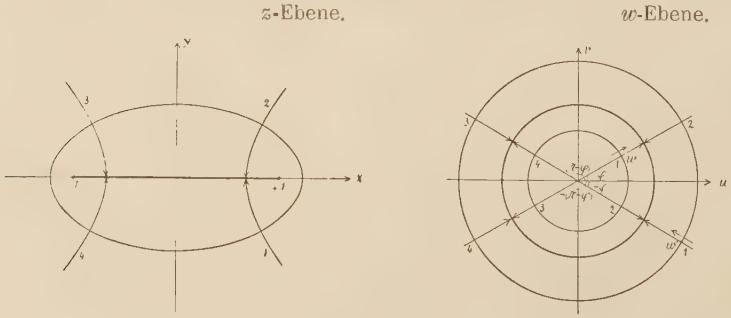
d. h. der Bildpunkt z wird sich auf einer Hyperbel bewegen mit den Brennpunkten

$$\pm\sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = \pm 1.$$

Da nun die Funktionen $\cos^2$ und $\sin^2$ für die vier Argumente φ, $-\varphi$, $\pi-\varphi$, $-(\pi-\varphi)$ denselben Wert haben, so wird, falls w irgend einen dieser vier Strahlen durchläuft, der Bildpunkt z sich stets auf derselben Hyperbel bewegen; um noch die nähere Zuordnung der Bilder erkennen zu können, will ich den Winkel φ zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ annehmen, also

$$0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \text{ und } r < 1.$$

Es kommen zunächst die Punkte innerhalb dem Kreise $|w| = 1$ in Betracht. Lässt man den Punkt w sich auf dem Strahl mit dem Winkel φ im Nullpunkt beginnend bis zum Einheitskreis hin bewegen, dann lassen die Beziehungen (17) erkennen, dass sich der Bildpunkt z auf demjenigen Teil der Hyperbel (19) bewegt, für den $x > 0$ und $y < 0$, der also im IV. Quadranten liegt und zwar beginnt z die Bewegung im Punkte ∞ und nähert sich schliesslich einem Punkte der Strecke $-1 \cdots +1$, den er erreicht, wenn w den Einheitskreis erreicht. Beachtet man, dass die Punkte w und w' denselben Punkt z zum Bilde haben, und, dass sich w auf dem Strahle mit dem Winkel φ vom Nullpunkt bis zum Einheitskreis bewegt, wenn sich w' auf dem Strahle mit dem Winkel $-\varphi$ vom Punkt ∞ von aussen gegen den Einheitskreis bewegt, so erkennt man die Zuordnung der Punkte der z- und w-Ebene, falls man die analogen Betrachtungen für die andern Strahlen durchführt; in der Figur geben die Zahlen die einander entsprechenden Stücke an.



Figur 4.

Offenbar ist unsere Abbildungsfunktion $w = z + \sqrt{z^2 - 1}$ zweideutig und ihre beiden Zweige unterscheiden sich nur dadurch, dass ihr Wurzelwert entgegengesetztes Vorzeichen hat. Ist der eine Zweig

$$z + \sqrt{z^2 - 1} = w ,$$

dann heisst der andere Zweig

$$z - \sqrt{z^2 - 1} = \frac{1}{z + \sqrt{z^2 - 1}} = \frac{1}{w} = w' ,$$

wobei $\sqrt{z^2 - 1}$ folgende Bedeutung haben soll: es sei zur Abkürzung $Z = z^2 - 1$, dann soll

$$\sqrt{Z} = |\sqrt{Z}|\, e^{i\frac{\sphericalangle Z \pm 2\pi}{2}} = |\sqrt{Z}|\, e^{i\left(\frac{\sphericalangle Z}{2} \pm \pi\right)}$$

bedeuten, so dass der Winkel von $\sqrt{Z}$ zwischen $-\pi$ und $-\frac{\pi}{2}$ und zwischen $+\frac{\pi}{2}$ und $+\pi$ liegt. Wenn z in einen reellen Wert $> +1$ übergeht, so geht Z in einen positiv reellen Wert über und $\sphericalangle Z$ wird 0, so dass $\sqrt{Z} = \sqrt{z^2 - 1}$ einen negativ reellen Wert annimmt. Wenn z eine Ellipse durchläuft, so wird nach dieser Festsetzung der Punkt w' einen zum Einheitskreise konzentrischen Kreis durchlaufen, dessen Radius > 1 ist, währenddem der Punkt w einen ebenfalls konzentrischen Kreis durchwandert, der innerhalb dem Einheitskreis liegt. Die beiden Zweige w und w' sind aber unstetig längs der Strecke $-1 \cdots +1$, was sich in sehr anschaulicher Weise folgendermassen zeigen lässt: Wandert der Punkt z auf irgend einer Hyperbel der Schaar (19) im 1. Quadranten gegen die x-Axe, dann bewegt sich der Bildpunkt w auf dem Strahle mit dem Winkel φ von Innen gegen den Einheitskreis; nähert sich dagegen der Punkt z auf demselben Hyperbelast von unten der x-Axe, so nähert sich der Bildpunkt w auf dem Strahle mit dem Winkel $+\varphi$ von Innen dem Einheitskreis. Wenn sich also z von oben und von unten einem Punkte der Strecke $-1 \cdots +1$ nähert, so nähert sich w zwei verschiedenen Punkten, die Spiegelbilder sind in bezug auf die u-Axe, d. h. es konvergiert der Funktionswert von $z + \sqrt{z^2 - 1^2}$ in diesem Falle gegen zwei verschiedene Werte, so, dass, wenn z eine beliebige Stelle der Strecke $-1 \cdots +1$ passiert, der Funktionswert w einen Sprung macht. Eine analoge Überlegung

gilt für den andern Zweig w'. Wir gelangen so zu folgendem Resultat: Die beiden Zweige $w = z + \sqrt{z^2 - 1}$ und $w' = z - \sqrt{z^2 - 1}$ sind im Innern einer Ellipse mit den Brennpunkten ± 1 eindeutige, endliche und stetige Funktionen von z mit Ausnahme der geradlinigen Verbindung $-1 \cdots +1$; da ferner

$$\frac{dw}{dz} = 1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 - 1}}, \quad \frac{dw'}{dz} = 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 - 1}}$$

in jedem Punkte zwischen zwei konfokalen Ellipsen mit den Brennpunkten ± 1 einen bestimmten endlichen von Null verschiedenen Wert haben, so wird durch den Zweig $w = z + \sqrt{z^2 - 1}$ dieser Ellipsenring konform abgebildet auf einen Kreisring, der innerhalb des Einheitskreises liegt, währenddem durch den Zweig $w' = z - \sqrt{z^2 - 1}$ derselbe Ellipsenring konform abgebildet wird auf einen Kreisring, der ausserhalb dem Einheitskreise liegt, derart, dass beide Kreisringe konzentrisch zum Einheitskreis sind. Lässt man nun die innere Ellipse sich zusammenziehen, bis sie sich auf die Strecke $-1 \cdots +1$ reduziert, so werden der äussere Kreis des innern und der innere Kreis des äussern Ringes zugleich gegen den Einheitskreis konvergieren. Betrachtet man die beiden zusammenstossenden Ringe als einen einzigen ganzen, so können wir sagen: Die Funktion

$$z = \frac{w^2 + 1}{2w}$$

ist im Innern dieses Ringes eine eindeutige reguläre analytische Funktion von w. Betrachtet man eine im Innern der vorhin fixierten äussern Ellipse eindeutige reguläre analytische Funktion $F(z)$, so wird die Funktion

$$F\left(\frac{w^2 + 1}{2w}\right) = \Phi(w)$$

eine im Innern des Kreisringes eindeutige reguläre analytische Funktion sein und lässt sich deshalb in eine Laurent'sche Reihe entwickeln

$$\Phi(w) = \alpha_0 + \alpha_1 w + \alpha_2 w^2 + \cdots + \alpha_{-1} \frac{1}{w} + \alpha_{-2} \frac{1}{w^2} + \cdots . \tag{20}$$

Besitzt $F(z)$ auf der Ellipse einen singulären Punkt z_1 (neben andern), dann wird die Funktion $\Phi(w)$ in den beiden Bildpunkten von z_1, nämlich w_1 und w_1', singulär sein; der eine, w_1, liegt auf dem innern Rand, der andere, w_1', auf dem äussern Rand des Ringes. Über die Reihenentwicklung von $\Phi(w)$ lässt sich folgendes sagen:

In jedem Gebiete, das innerhalb dem Ringe liegt, konvergiert die Reihe

$$\begin{aligned} &\alpha_0 + \alpha_1 w + \alpha_2 w^2 + \cdots \\ &\quad + \alpha_{-1}\frac{1}{w} + \alpha_{-2}\frac{1}{w^2} + \cdots \end{aligned} \tag{20}$$

gleichmässig gegen den Funktionswert von $\Phi(w)$; in jedem Punkte ausserhalb des Ringes ist diese Darstellung für $\Phi(w)$ ungültig, da stets der eine Teil der Reihe divergiert. Ist w ein beliebiger Punkt innerhalb des Ringes, dann ist auch $\frac{1}{w} = w'$ im Innern des Ringes und da der Ausdruck $\frac{w^2+1}{2w}$ unverändert bleibt, wenn man an Stelle von $w \left| \frac{1}{w}\right.$ setzt, so folgt daraus, dass $\Phi(w)$ an der Stelle w und $\frac{1}{w}$ denselben Wert annimmt; da dies für jeden Punkt w innerhalb des Ringes zutrifft, und da daselbst $\Phi(w)$ durch die Laurent'sche Reihe (20) dargestellt wird, so ergibt sich daraus die im Innern des Ringes bestehende Identität

$$\cdots + \alpha_{-2}\frac{1}{w^2} + \alpha_{-1}\frac{1}{w} + \alpha_0 + \alpha_1 w + \alpha_2 w^2 + \cdots \equiv$$

$$\cdots + \alpha_{-2} w^2 + \alpha_{-1} w + \alpha_0 + \alpha_1 \frac{1}{w} + \alpha_2 \frac{1}{w^2} + \cdots .$$

Wegen der Eindeutigkeit der Laurent'schen Entwicklung schliesst man daraus, dass die Koëffizienten gleich hoher Potenzen gleich sein müssen; also

$$\alpha_{-n} = \alpha_n ,$$

wodurch sich die Darstellung für $\Phi(w)$ in folgender Weise vereinfacht

$$\begin{aligned} \Phi(w) &= \alpha_0 + \alpha_1\left(w+\frac{1}{w}\right) + \alpha_2\left(w^2+\frac{1}{w^2}\right) + \alpha_3\left(w^3+\frac{1}{w^3}\right) + \cdots \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 (w + w') + \alpha_2 (w^2 + w'^2) + \alpha_3 (w^3 + w'^3) + \cdots . \end{aligned}$$

Man gelangt zur gewünschten Darstellung von $F(z)$, wenn man für w und w' die Ausdrücke in z einsetzt; dann geht die linke Seite über in $F(z)$, denn es ist

$$\Phi\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)=F(z)$$

und das allgemeine Glied der Entwicklung hat die Form

$$\alpha_n\left[\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)^n+\left(z-\sqrt{z^2-1}\right)^n\right]=-\alpha_n P_n(z);$$

wie man sieht, erhält man hier wieder dieselben Polynome, wie sie in Kapitel II, § 2 abgeleitet wurden. Löst man die Klammern nach dem binomischen Satze auf, so erhält man für

$$-P_n(z)=2\left\{z^n+\binom{n}{2}z^{n-2}(z^2-1)+\binom{n}{4}z^{n-4}(z^2-1)^2+\cdots\right.$$
$$\left.+\binom{n}{n-2}z^2(z^2-1)^{\frac{n-2}{2}}+(z^2-1)^{\frac{n}{2}}\right\},\quad\text{wenn } n \text{ gerade}$$

$$-P_n(z)=2\left\{z^n+\binom{n}{2}z^{n-2}(z^2-1)+\binom{n}{4}z^{n-4}(z^2-1)^2+\cdots\right.$$
$$\left.+\binom{n}{n-1}z(z^2-1)^{\frac{n-1}{2}}\right\},\quad\text{wenn } n \text{ ungerade}$$

Ist z ein beliebiger Punkt im Innern der fixierten Ellipse, dann wird die Reihe

$$F(z)=\sum_0^\infty n\,\alpha_n\left[\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)^n+\left(z-\sqrt{z^2-1}\right)^n\right]\qquad(21)$$

gegen den Wert von $F(z)$ konvergieren und zwar gleichmässig und absolut für jedes ganz im Innern der Ellipse liegende Gebiet. Da früher angenommen wurde, es liege auf der Ellipse mindestens ein singulärer Punkt von $F(z)$, so wird die Entwicklung (21) in jedem Punkte z ausserhalb der Ellipse divergieren, da die Bildpunkte dieser Punkte z ausserhalb dem Kreisring liegen und daselbst die Laurent'sche Reihe divergiert. Damit ist der Satz bewiesen, der sich aus den Faber'schen Entwicklungen als Spezialfall ergab:

Ist $F(z)$ eine innerhalb einer Ellipse mit den Brennpunkten $+1$ eindeutige reguläre analytische Funktion von z, so lässt sie sich darstellen durch eine polynomische Reihe von der Form

$$F(z) = \sum_{0}^{\infty} {}_{n} \alpha_n \left[(z + \sqrt{z^2 - 1})^n + (z - \sqrt{z^2 - 1})^n \right]. \qquad (21)$$

Die Entwicklung konvergiert absolut und gleichmässig in jedem Gebiete, das innerhalb der kleinsten Ellipse liegt, die durch einen singulären Punkt von $F(z)$ geht; in jedem Punkte ausserhalb dieser Ellipse divergiert die Reihe.

Die polynomische Entwicklung einer Funktion $F(z)$ für die Ellipse nach diesem Verfahren angeben zu können, erfordert die Kenntnis der Laurent'schen Reihenentwicklung der Funktion $F\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{w} + w\right)\right]$; es sei

$$F\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{w} + w\right)\right] = \cdots + \frac{\alpha_{-2}}{w^2} + \frac{\alpha_{-1}}{w} + \alpha_0 + \alpha_1 w + \alpha_2 w^2 + \cdots, \qquad (20)$$

dann hat sich α_ν als Koëffizient von $\left[(z + \sqrt{z^2 - 1})^n + (z - \sqrt{z^2 - 1})^n\right]$ ergeben. Dasselbe Resultat lässt sich auch aus der Integraldarstellung der Koëffizienten ableiten, denn man erkennt die folgende allgemeinere Tatsache: Bezeichnet man mit $z = \psi(w)$ diejenige Funktion, die ein beliebiges endliches Gebiet S, das von einem einzigen regulären analytischen Kurvenzuge begrenzt wird, auf das Innere des Kreises $|w| = 1$ konform abbildet (siehe § 4), dann lieferte die Faber'sche Theorie für die Koëffizienten a_ν der polynomischen Entwicklung für die innerhalb S reguläre analytische Funktion $F(z)$ die Darstellung

$$a_\nu = -\frac{1}{2\pi i} \int_{K_\omega} F[\psi(w)]\, w^{\nu - 1}\, dw\,; \qquad (22)$$

der Ausdruck $F[\psi(w)]$ verhält sich im Kreisringe zwischen dem Einheitskreise $|w| = 1$ und dem Kreise K_{ω_1} sicher regulär, besitzt aber in beiden Teilen ausserhalb dieses Kreisringes singuläre Punkte und lässt sich deshalb in eine innerhalb dieses Ringes gültige Laurent'sche Reihe entwickeln,

$$F[\psi(w)] = \cdots + \frac{\alpha_{-2}}{w^2} + \frac{\alpha_{-1}}{w} + \alpha_0 + \alpha_1 w + \alpha_2 w^2 + \cdots.$$

Die Kenntnis der Grössen a_{-1}, a_{-2}, a_{-3}, $\cdots$, $a_{-\nu}$, $\cdots$ genügt, um die Koëffizienten a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_ν, $\cdots$ der polynomischen Entwicklung von $F(z)$ zu bestimmen; denn die Laurent'sche Reihe für den Integranden von (22) lautet

$$F[\psi(w)]\, w^{\nu-1} = \cdots + \frac{a_{-\nu}}{w} + a_{-\nu+1} + a_{-\nu+2}\, w + \cdots .$$

Da der Integrationsweg K_ω im Innern des Ringes zwischen $|\omega| = 1$ und K_{ω_1} verläuft, so ergibt sich durch gliedweise Integration $a_\nu = - a_{-\nu}$; d. h. es ist in der polynomischen Entwicklung von $F(z)$ im Innern des Gebietes S $a_{-\nu}$ der Koëffizient des Polynoms $P_\nu(z)$, das zum Gebiete S gehört.

Da bei der Ellipse $\psi(w) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{w} + w\right)$ ist, so wird in diesem Fall $F[\psi(w)] = F\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{w} + w\right)\right]$, deren Laurent'sche Reihe unter (20) angegeben ist; da in dieser Reihe $\alpha_{-\nu} = \alpha_\nu$ ist, so folgt daraus, dass $-\alpha_\nu$ der Koëffizient von $P_\nu(z) = \left[(z + \sqrt{z^2-1})^n + (z - \sqrt{z^2-1})^n\right]$ ist, womit die aufgestellte Behauptung bewiesen ist.

§ 7.

Polynomische Entwicklungen von geraden und ungeraden Funktionen für das Innere von Cassinischen Kurven.

In diesem Paragraphen wird ein Verfahren entwickelt, das polynomische Darstellungen von geraden und ungeraden Funktionen $F(z)$ liefert, die im Innern von Cassinischen Kurven mit den festen Punkten ± 1 konvergieren und deren Koëffizienten als Differentialquotienten einer Funktion, die aus der darzustellenden Funktion $F(z)$ durch eine Substitution erhalten wird, ausgedrückt werden können.

Diese polynomische Entwicklung gewinnt man mit Hilfe der Funktion

$$z = w \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{w^2}}, \tag{23}$$

die das Innere einer Cassinischen Kurve $|z-1|\,|z+1| = konst.$ auf das Innere eines Kreises $|w| = konst.$ abbildet, deren Diskus-

sion zunächst durchgeführt werden soll. Durch eine einfache Umformung dieses Ausdrucks wird man erkennen, dass jedem Punkte w eines bestimmten Kreises $|w| = konst.$ nur Punkte z entsprechen, die auf einer Cassinischen Kurve liegen, $|z-1|\ |z+1| = konst.$ Quadriert man beide Seiten, so kann man dem Ausdruck (23) die Gestalt geben

$$w^2 = z^2 - 1;$$

daraus erkennt man unmittelbar, dass wenn $|w| = konst.$ ist, auch $|z-1|\ |z+1| = konst.$ sein muss. Dabei bedeuten $|z-1|$ und $|z+1|$ die Entfernungen des Punktes z resp. von den Punkten $+1$ und -1. Damit ist zunächst gezeigt, dass wenn sich der Punkt w auf einem Kreise $|w| = konst.$ bewegt, der Bildpunkt z nur auf einer gewissen Cassinischen Kurve mit den festen Punkten ± 1 liegen kann.

Nachdem dies festgestellt ist, handelt es sich darum, die Wurzel in der Abbildungsfunktion (23) eindeutig zu definieren und dann das Verhalten der so erhaltenen eindeutigen Funktion in der w-Ebene kennen zu lernen.

Zu diesem Zwecke will ich für w die Polardarstellung einführen

$$w = r e^{i\varphi}.$$

Es wird dann der Punkt $w' = 1 + \frac{1}{w^2}$ die Darstellung haben

$$w' = 1 + \frac{1}{r^2} e^{-i2\varphi}$$

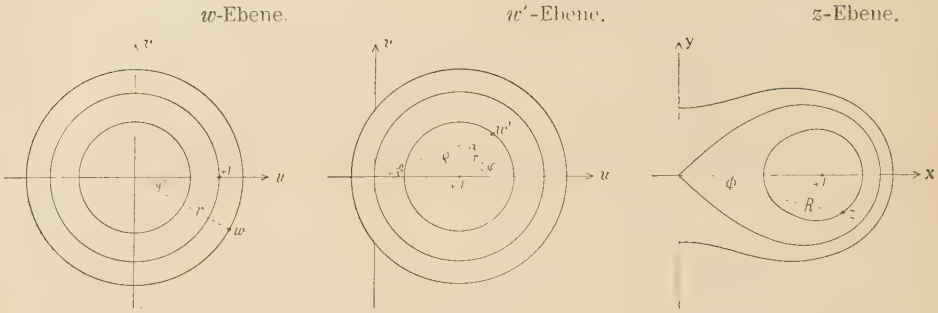
und wird sich auf einem Kreis mit dem Radius $\frac{1}{r^2}$ und dem Zentrum $+1$ bewegen, falls w auf einem Kreise $|w| = r = konst.$ wandert. Führt man ϱ als absoluten Betrag und $-\vartheta$ als Winkel der Zahl w' ein, so liegt ϑ zwischen den Grenzen $-\pi$ und $+\pi$; setzt man

$$\sqrt{1 + \frac{1}{w^2}} = \sqrt{\varrho}\, e^{-i\frac{\vartheta}{2}}, \tag{24}$$

so ist dadurch die Funktion (23) vollkommen definiert und zwar wird

$$z = \sqrt{\varrho}\, r\, e^{i\frac{2\varphi - \vartheta}{2}} = R\, e^{i\Phi},$$

sodass man die folgenden Bestimmungsgleichungen erhält



Figur 5.

$$R = r\sqrt{\varrho} \text{ und } \Phi = \frac{2\varphi - \vartheta}{2}.$$

Die Figur gestattet das Verhalten der Winkeldifferenz $(2\varphi - \vartheta)$ leicht zu verfolgen; denn bezeichnet man mit α den beim Punkte w' liegenden Innenwinkel des Dreiecks $(0, +1, w')$, so gilt offenbar $\Phi = -\frac{\alpha}{2}$, falls w' in der obern Halbebene liegt, und liegt w' in der untern Halbebene, dann ist $\Phi = \frac{\alpha}{2}$.

Es handelt sich jetzt darum zu zeigen, dass wenn w auf einem Kreise $|w| = r = konst.$ einen einzigen, aber vollständigen Umlauf ausführt, stets im selben Sinn, auch der Bildpunkt z die Cassinische Kurve $|z-1|\,|z+1| = r^2$ einmal vollständig und stets im selben Sinn durchläuft; wenn das gezeigt ist, so ist damit bewiesen, dass durch die Beziehung (23) jedem Punkt w eines Kreises ein einziger Punkt z einer Cassinischen Kurve und jedem Punkt z dieser Kurve ein einziger Punkt w jenes Kreises entspricht.

Es sind die drei Fälle $r \gtreqless 1$ zu unterscheiden, von denen jeder besonders betrachtet werden muss.

1. Ist $r < 1$, dann ist $\frac{1}{r^2} > 1$. Wir wissen schon, dass in diesem Fall die Bildpunkte z der Punkte w des Kreises $|w| = r$ nur auf der Cassinischen Kurve $|z-1|\,|z+1| = r^2$ liegen können, und diese zerfällt bekanntlich in zwei Ovale, von denen jedes einen der Punkte $+1$ und -1 umschliesst. Lässt man den Winkel φ stetig zunehmen von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$, so durchwandert der Punkt w den Teil des Kreises

$|w| = r < 1$ im positiven Sinn, der in der rechten Halbebene liegt. Da in diesem Fall -2φ die Werte von $+\pi$ bis $-\pi$ stetig durchläuft, so wird, wie die Figur erkennen lässt, der Winkel α von 0 zunehmen bis er ein Maximum erreicht hat, um dann wieder bis 0 abzunehmen, wenn der Punkt w' die positive u-Axe erreicht; dasselbe wiederholt sich in der untern Halbebene. Somit wird Φ von 0 abnehmen bis zu einem Minimum, um dann dieselben Werte im entgegengesetzten Sinne bis 0 wieder zu durchlaufen, währenddem der absolute Betrag $R = r\sqrt{\varrho}$ fortwährend zunimmt und sein Maximum erreicht, wenn $\Phi = 0$ ist. Hernach wird R stets abnehmen, währenddem Φ bis zu einem Maximum zunimmt und dann im entgegengesetzten Sinn dieselben Werte bis 0 wieder durchläuft. Daraus ergibt sich das folgende Resultat: Ist $r < 1$ und durchläuft w den Halbkreis $|w| = r$ in der rechten Halbebene in positivem Sinn, dann durchwandert der Bildpunkt z das Oval $|z-1|\,|z+1| = r^2$, das in der rechten Halbebene liegt, einmal vollständig und stets in positivem Sinn.

Bevor ich auf die gegenseitige Beziehung der Punkte in der linken Halbebene eingehe, will ich die andern Fälle betrachten.

2. Ist $r = 1$, so ist $\frac{1}{r^2} = 1$. Lässt man wieder φ stetig zunehmen von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$; dann wird der Punkt w' auf dem Kreise mit dem Radius 1 und dem Zentrum $+1$ im negativen Sinn sich bewegen, wobei α in der obern Halbebene abnimmt von $\frac{\pi}{2}$ bis 0 und in der untern Halbebene von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ wieder wächst. Das Ergebnis lässt sich folgendermassen aussprechen: Durchläuft der Punkt w den Halbkreis $|w| = 1$ in der rechten Halbebene in positivem Sinn, so nimmt der Winkel Φ von $-\frac{\pi}{4}$ zu bis 0, währenddem der absolute Betrag R von 0 stets zunimmt und den Maximalwert erreicht für $\Phi = 0$, hernach nimmt der absolute Betrag R stetig ab bis 0 und der Winkel Φ wächst von 0 bis $+\frac{\pi}{4}$; d. h. der Bildpunkt z durchläuft das rechte Blatt der Lemniskate $|z-1|\,|z+1| = 1$ einmal vollständig und stets in positivem Sinn.

3. Ist $r > 1$, dann ist $\frac{1}{r^2} < 1$. Wenn φ die Werte von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$ stetig durchläuft, so wird der Punkt w' den Kreis mit dem Radius $\frac{1}{r^2}$ und dem Zentrum $+1$ im negativen Sinn durchlaufen; es wird also bei stetigem Wachstum von $R = r\sqrt{\varrho}$ α abnehmen von 2π bis 0 in der obern Halbebene, somit wird Φ zunehmen von $-\pi$ bis 0; in der untern Halbebene wird bei fortwährendem Abnehmen von R der Winkel α zunehmen von 0 bis 2π, also Φ von 0 bis π, so dass man zu folgendem Resultat gelangt: Durchläuft der Punkt w den Halbkreis $|w| = r > 1$ in der rechten Halbebene in positivem Sinn, so durchläuft der Bildpunkt z denjenigen Teil der Cassinischen Kurve $|z-1|\,|z+1| = r^2 > 1$, der in der rechten Halbebene liegt, einmal vollständig und stets in positivem Sinn.

Um noch die ein-eindeutige Beziehung zwischen den Punkten der linken Halbebenen darzutun, ist es das Einfachste den Umstand zu benützen, dass die Abbildungsfunktion (23) eine ungerade Funktion von w ist; setzt man $w^* = -w$, so wird

$$z^* = w^* \sqrt{1 + \frac{1}{w^{*2}}} = -w\sqrt{1 + \frac{1}{w^2}} = -z.$$

Bewegt sich w auf demjenigen Teil des Kreises $|w| = r$, der in der rechten Halbebene liegt, in positivem Sinn, so bewegt sich w^* auf demjenigen Teil desselben Kreises, der in der linken Halbebene liegt, auch in positivem Sinn; sein Bildpunkt z^* ist stets das Spiegelbild von z in bezug auf den Punkt $z = 0$, und durchwandert somit den Teil der Cassinischen Kurve $|z-1|\,|z+1| = r^2$, der in der linken Halbebene liegt, einmal vollständig und stets in positivem Sinn.

Damit ist nachgewiesen, dass die Funktion

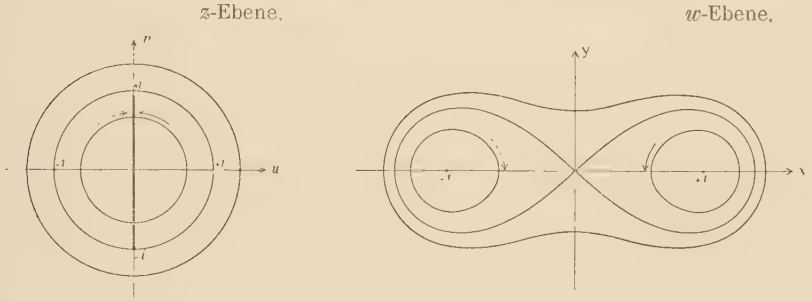
$$z = w\sqrt{1 + \frac{1}{w^2}},$$

wobei die Wurzel unter (24) definiert ist, zwischen den Punkten der z- und w-Ebene eine ein-eindeutige Beziehung ergibt. Bekanntlich ist die Abbildung überall da konform, wo der erste Differenzialquotient der Abbildungsfunktion einen bestimmten endlichen von Null verschiedenen Wert hat. Da

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{w^2}}},$$

so ergeben sich die Punkte $w = 0$ und $w = \mp i$ als singuläre Punkte der konformen Abbildung.

Verfolgen wir nochmals die Bewegung des Punktes z, falls sich w auf einem Kreise $|w| = r < 1$ bewegt. Jedesmal, wenn der Punkt w die Verbindungsstrecke $-i \cdots +i$ überschreitet, springt der Bildpunkt z von einem Oval zum andern über, was sich leicht an Hand der Figur verfolgen lässt. Die Strecke $-i \cdots +i$ ist somit



Figur 6.

bei unsern Festsetzungen eine Unstetigkeitslinie für die Abbildungsfunktion. Das Endergebnis ist das folgende: Die Funktion

$$z = w\sqrt{1+\frac{1}{w^2}}, \tag{23}$$

deren Wurzel unter (24) bestimmt ist, bildet das Innere eines Kreises $|w| = r$ und das Innere der Cassinischen Kurve $|z-1| \cdot |z+1| = r^2$ konform aufeinander ab mit Ausnahme der drei Punkte $w = 0$ und $w = \mp i$; im Innern des Kreises $|w| = r$ ist die Abbildungsfunktion regulären Verhaltens bis auf die Punkte der Strecke $-i \cdots +i$, wo sie unstetig ist. Die Gebiete ausserhalb der Kurven $|z-1| \; |z+1| = r^2 > 1$ und $|w| = r > 1$ werden durch die Funktion (23) ausnahmslos ein-eindeutig und konform aufeinander bezogen.

Indem man an die Diskussion der Funktion (23) anschliesst, lassen sich die Polynome $P_\nu(z)$ für die Cassini'schen Kurven nach der Faber'schen Theorie leicht berechnen; setzt man $w = \frac{1}{\tau}$, so wird

bekanntlich durch diese Transformation das Gebiet ausserhalb dem Einheitskreise konform auf dasjenige innerhalb desselben bezogen; deshalb wird die Funktion

$$z = \frac{1}{\tau}\sqrt{1+\tau^2} = \psi(\tau) \tag{25}$$

das Äussere einer Cassinischen Kurve $|z-1|\,|z+1| = r^2 > 1$ konform abbilden auf das Innere des Kreises $|w| = \frac{1}{r}$. Die Lemniskate, deren Gleichung in rechtwinkligen Koordinaten x, y

$$[(x-1)^2+y^2]\,[(x+1)^2+y^2] = 1$$

lautet, übernimmt in diesem Beispiel die Rolle der Kurve C_{ω_1} (siehe § 4). Setzt man in dem Ausdruck $\frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)-z}$ für $\psi(\tau)$ die Funktion (25) ein, so erhält man die Polynome $P_\nu(z)$, indem man

$$\frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)-z} + \frac{1}{\tau} = \left(\frac{\tau}{1+\tau^2} - \frac{z}{\sqrt{1+\tau^2}}\right)\frac{1}{1-\frac{\tau z}{\sqrt{1+\tau^2}}} =$$

$$= \sum_1^\infty \nu\,\tau^\nu z^{\nu-1}(1+\tau^2)^{\frac{-\nu-1}{2}} - \sum_0^\infty \nu\,\tau^\nu z^{\nu+1}(1+\tau^2)^{\frac{-\nu-1}{2}}$$

nach Potenzen von τ anordnet, was dadurch erreicht werden kann, dass man die Potenzen von $(1+\tau^2)$ nach dem binomischen Satz entwickelt und die Glieder mit gleich hohen Potenzen zusammenfasst.[1]) Es ergibt sich für

$$-P_{2\nu}(z) = z^{2\nu} + z^{2\nu-2}\left[\binom{-\nu+1}{1}-1\right] + z^{2\nu-4}\left[\binom{-\nu+2}{2}-\binom{-\nu+1}{1}\right] +$$

$$+ z^{2\nu-6}\left[\binom{-\nu+3}{3}-\binom{-\nu+2}{2}\right] + \cdots + z^2\left[\binom{-1}{\nu-1}-\binom{-2}{\nu-2}\right]-\binom{-1}{\nu-1},$$

[1]) Es sei hier erwähnt, dass in der früher zitierten Abhandlung von G. Faber, Polynomische Enwicklungen I, Mathem. Annalen 57, pg. 402, ein kleiner Rechnungsfehler sich vorfindet, so dass vor allem die Polynome $P_\nu(z)$ für gerades ν komplizierter ausfallen, als sie in Wirklichkeit sind; dort steht

$$\frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)-z} + \frac{1}{\tau} = \left[\frac{(2)\,\tau}{1+\tau^2} - \frac{z}{\sqrt{1+\tau^2}}\right]\frac{1}{1-\frac{\tau z}{\sqrt{1+\tau^2}}}.$$

und da

$$\binom{-n+k}{k} - \binom{-n+k+1}{k+1} = (-1)^k \binom{n}{k+1}$$

so erhält man

$$-P_{2\nu}(z) = \sum_0^{\nu} k\,(-1)^k \binom{\nu}{k} z^{2\nu-2k}.$$

Wenn man beachtet, dass diese Reihe eine binomische Entwicklung ist, so gelangt man zu dem einfachen Resultat:

$$P_{2\nu}(z) = -(z^2-1)^{\nu},$$

dass also alle Polynome mit geradem Index als Potenzen eines einzigen quadratischen Polynoms dargestellt werden können.

Weniger einfach ist die Form der Polynome mit ungeradem Index; denn es ist

$$-P_{2\nu+1}(z) = z^{2\nu+1} + z^{2\nu-1}\left[\binom{-2\nu+1}{2}{1} - 1\right] +$$

$$+ z^{2\nu-3}\left[\binom{-2\nu+3}{2}{2} - \binom{-2\nu+1}{2}{1}\right] + \cdots$$

$$\cdots + z^3\left[\binom{-\frac{3}{2}}{\nu-1} - \binom{-\frac{5}{2}}{\nu-2}\right] + z\left[\binom{-\frac{1}{2}}{\nu} - \binom{-\frac{3}{2}}{\nu-1}\right];$$

wegen der Relation

$$\binom{-2\nu+2k-3}{2}{k-1} - \binom{-2\nu+2k-1}{2}{k} =$$

$$= (-1)^{k+1}\frac{(2\nu+1)(2\nu-1)\cdots(2\nu-2k+3)}{2^k \cdot k!}$$

erhält man den einfachern Ausdruck

$$P_{2\nu+1}(z) = -\sum_0^{\nu} k(-1)^k \frac{(2\nu+1)(2\nu-1)(2\nu-3)\cdots(2\nu-2k+3)}{2^k \cdot k!} z^{2\nu+1-2k}.$$

Zu den Polynomen $P_{2\nu}(z)$ für die Cassinischen Kurven gelangt man auch auf andere Art, wobei sich auch die Koëffizienten der Entwicklung einfach darstellen lassen. Es sei $F(z)$ eine inner-

halb einer Cassinischen Kurve mit den festen Punkten $+1$ eindeutige reguläre analytische Funktion, die zunächst als gerade Funktion von z vorausgesetzt werden möge. Dann bilde man die Funktion

$$\Phi(w) = F\left(w\sqrt{1+\frac{1}{w^2}}\right),$$

die folgende Eigenschaften besitzt:

1. Ist z_0 ein singulärer Punkt von $F(z)$, so ist sein Bildpunkt w_0 ein singulärer Punkt von $\Phi(w)$.

2. Weil $\Phi(w)$ eine gerade Funktion von w ist, so kann man auf Grund der Figur erkennen, dass $\Phi(w)$ im Innern des Kreises $|w| = |w_0|$ eine stetige Funktion von w ist, vor allem auch in den Punkten der Strecke $-i \cdots +i$; denn, nähert sich der Punkt w auf einem Kreis $|w| = konst. < 1$ einem beliebigen Punkt $\bar{w}$ der Strecke $+i \cdots i$, das eine Mal von rechts, das andere Mal von links, so wandert der Bildpunkt z im ersten Fall auf dem Oval rechts gegen einen Punkt $\bar{z}$ der positiven u-Axe, im zweiten Fall auf dem linken Oval gegen den Punkt $-\bar{z}$ der negativen u-Axe; da aber $F(z)$ eine gerade Funktion von z ist, so konvergiert $\Phi(w)$ in beiden Fällen gegen denselben Wert.

3. $\Phi(w)$ ist eindeutig und endlich innerhalb des Kreises $|w| = w_0|$.

4. $\Phi(w)$ ist im Innern des Kreises $|w| < |w_0|$ eine analytische Funktion von w; denn es hat

$$\frac{d\Phi(w)}{dw} = \frac{F(z)}{dz}\frac{w}{z}$$

in jedem innern Punkt einen einzigen bestimmten Wert, auch in den Punkten der Strecke $-i \cdots +i$.

Auf Grund dieser Eigenschaften lässt sich $\Phi(w)$ in eine innerhalb des Kreises $|w| = |w_0|$ gleichmässig konvergente Potenzreihe entwickeln, die in jedem Punkte ausserhalb dieses Kreises divergiert und die Form hat

$$\Phi(w) = \Phi(0) + \frac{\Phi''(0)}{2!}w^2 + \frac{\Phi''''(0)}{4!}w^4 \cdots . \qquad (26)$$

Substituiert man für w die Umkehrfunktion der Abbildungsfunktion (23) und zwar denjenigen Zweig, der dieselbe Relation gibt zwischen z und w, wie der Ausdruck (23), so erhält man

$$F(z) = \Phi(0) + \frac{\Phi''(0)}{2!}(z^2-1) + \frac{\Phi''''(0)}{4!}(z^2-1)^2 + \cdots . \qquad (27)$$

Da die Reihe (26) für $|w| < |w_0|$ gleichmässig konvergiert, so wird die Darstellung (27) für alle z innerhalb der Cassinischen Kurve $|z-1|\,|z+1| = |w_0|^2 = |z_0-1|\,|z_0+1|$, die durch den singulären Punkt z_0 geht, gleichmässig konvergieren, dagegen ausserhalb divergieren.

Setzt man z. B.

$$F(z) = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2}z^2};$$

diese Funktion ist jedenfalls für $z=0$ singulär, verhält sich dagegen regulär im Innern der Lemniskate mit Doppelpunkt; die polynomische Entwicklung für dieses Gebiet lautet demnach:

$$\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2}z^2} = 1 - \frac{\pi^2}{8}(z^2-1)^2 + \frac{11}{768}\pi^4(z^2-1)^4 - \frac{17}{11520}\pi^6(z^2-1)^6 + \cdots ,$$

welche nur im Innern der genannten Lemniskate gültig ist, in jedem Punkte ausserhalb divergiert.

Eine ungerade Funktion lässt sich jedenfalls nicht in eine innerhalb einer Cassinischen Kurve gültigen Reihe nach den Polynomen $(z^2-1)^n$ darstellen, dagegen sehr leicht in eine Reihe, die nach den Polynomen $z(z^2-1)^n$ fortschreitet. Setzt man jetzt $F(z)$ als ungerade Funktion von z voraus, so ist der Ausdruck $\frac{F(z)}{z}$ eine gerade Funktion von z, die innerhalb derselben Cassini'schen Kurve regulär ist, wie $F(z)$, auch in Punkte $z=0$, falls in diesem Punkte $F(z)$ regulär ist; denn $F(z)$ hat die Form

$$F(z) = a_1 z + a_3 z^3 + a_5 z^5 + \cdots ,$$

folglich

$$\frac{F(z)}{z} = a_1 + a_3 z^2 + a_5 z^4 + \cdots ,$$

d. h. der Ausdruck $\frac{F(z)}{z}$ ist auch im Punkte $z=0$ regulär. Dieser Ausdruck lässt sich nach den vorhergehenden Entwicklungen in die folgende Reihe entwickeln

$$\frac{F(z)}{z} = \Phi(0) + \frac{\Phi''(0)}{2!}(z^2 - 1) + \frac{\Phi''''(0)}{4!}(z^2-1)^2 + \cdots,$$

indem man hier

$$\Phi(w) = \frac{F\left(w\sqrt{1+\frac{1}{w^2}}\right)}{w\sqrt{1+\frac{1}{w^2}}}$$

setzt. Daraus gewinnt man eine Darstellung für $F(z)$, nämlich:

$$F(z) = \Phi(0)\,z + \frac{\Phi''(0)}{2!}\,z(z^2-1) + \frac{\Phi''''(0)}{4!}\,z(z^2-1)^2 + \cdots,$$

die innerhalb der kleinsten Cassinischen Kurve mit den festen Punkten ± 1 und die durch einen singulären Punkt z_0 von $F(z)$ geht, absolut und gleichmässig konvergiert, ausserhalb divergiert.

§ 8.

Polynomische Entwicklung von beliebigen Funktionen in dem einen Blatt einer Lemniskate.

Dieser letzte Paragraph befasst sich mit der Aufstellung der polynomischen Entwicklung einer beliebigen Funktion $F(z)$, die für denjenigen Teil einer Cassinischen Kurve $|z-1|\,|z+1| = konst. < 1$ gültig ist, der in der rechten Halbebene liegt, und deren Koëffizienten leicht berechnet werden können. Die Entwicklungen geben zugleich auch ein allerdings sehr spezielles Beispiel einer polynomischen Entwicklung, die in zwei getrennt liegenden Gebieten zwei verschiedene Funktionen darstellt.

Zur Ableitung dieser polynomischen Reihe dient die Funktion

$$z = \sqrt{1+w}, \tag{28}$$

wo derjenige Zweig des Wurzelausdrucks zu verstehen ist, dessen Winkel zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegt. Diese Funktion (28) bildet das Innere des rechten Lemniskatenblattes in der z-Ebene auf das Innere des Einheitskreises $|w| = 1$ konform ab. Um diese Abbildung zu studieren, kann man in ähnlicher Weise vorgehen, wie im vorigen Paragraphen. Wir bilden die Umkehrfunktion

$$w = z^2 - 1;$$

dann erkennt man, dass den Punkten w eines Kreises $|w| = konst. = r$ nur solche Punkte z entsprechen, die auf der Cassinischen Kurve $|z-1|\,|z+1| = r$ liegen; um die nähere Zuordnung der Punkte z und w zu untersuchen, setzen wir

$$w = r\, e^{i\varphi}.$$

Bezeichnet man mit ϱ den absoluten Betrag und mit ϑ den Winkel von $1+w$, so erhält man für die Abbildungsfunktion folgende Darstellung

$$z = \sqrt{1 + r\, e^{i\varphi}} = \sqrt{\varrho}\cdot e^{i\frac{\vartheta}{2}}.$$

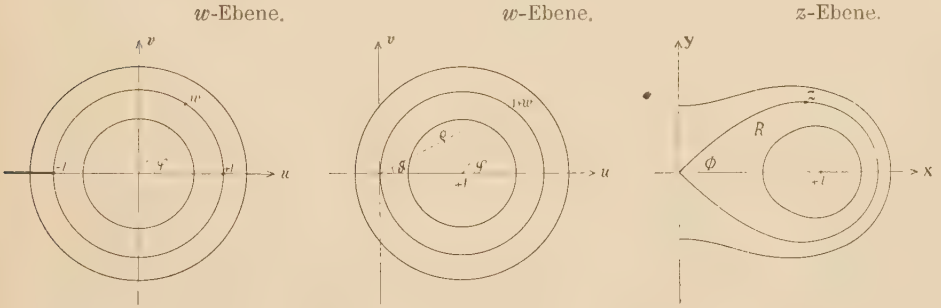
Setzt man

$$z = R\, e^{i\Phi},$$

so folgen die beiden Beziehungen

$$R = \sqrt{\varrho} \text{ und } \Phi = \frac{\vartheta}{2}.$$

Unterscheidet man wieder, wie im vorigen Paragraphen, die drei Fälle $r \gtreqless 1$, so findet man, dass wenn der Punkt w einen Kreis



Figur 7.

$|w| = r < 1$ stets im selben Sinn durchläuft, der Bildpunkt z dasjenige Oval der Kurve $|z-1|\,|z+1| = r$, das den Punkt $+1$ umschliesst, stets im selben Sinn einmal vollständig durchläuft. In derselben Art entspricht dem Einheitskreise in der w-Ebene derjenige Teil der Lemniskate mit Doppelpunkt, der den Punkt $+1$

umschliesst. Das Bild eines Kreises $w = r < 1$ ist eine Kurve, die nicht geschlossen ist. Wenn w den Kreis $|w| = r < 1$ durchläuft, so wird beim Überschreiten der negativen u-Axe der Bildpunkt z von einem Punkte der positiven y-Axe überspringen zu einem Punkte der negativen y-Axe. Mit andern Worten: Die Funktion (28) ist unstetig in den Punkten der negativen u-Axe mit Ausnahme der Punkte der Strecke $-1 \cdots 0$; im Innern des Einheitskreises der w-Ebene ist sie stetig, endlich und eindeutig. Da ferner $\frac{dz}{dw} = \frac{1}{2\sqrt{1+w}}$ im Innern dieses Kreises einen bestimmten, endlichen von Null verschiedenen Wert hat, so kann man folgendes Resultat aussprechen: Die Funktion (28) ist im Innern des Kreises $|w| = 1$ eine eindeutige reguläre analytische Funktion von w, und bildet das Innere dieses Kreises konform ab auf das Innere des rechten Blattes der Lemniskate $|z-1|\,|z+1| = 1$.

Zur Gewinnung einer polynomischen Darstellung für den rechten Teil einer Kurve $|z-1|\,|z+1| = r \leqq 1$ einer Funktion $F(z)$, die daselbst eindeutig, regulär und analytisch ist, bilden wir die Funktion

$$\Phi(w) = F\left(\sqrt{1+w}\right);$$

Diese Funktion $\Phi(w)$ ist jedenfalls im Innern des Kreises $|w| = r$ eine eindeutige reguläre analytische Funktion von w. Besitzt die Funktion $F(z)$ auf dem rechten Teil der Kurve $|z-1|\,|z+1| = r \leqq 1$ einen singulären Punkt z_0, dann entspricht diesem Punkte ein Punkt w_0 auf dem Kreise $|w| = r \leqq 1$, der ein singulärer Punkt ist von $\Phi(w)$. Die Funktion $\Phi(w)$ lässt sich deshalb in eine innerhalb dieses Kreises konvergente, ausserhalb divergente Potenzreihe entwickeln. Liegt dagegen kein singulärer Punkt von $F(z)$ im Innern und auf dem Rande des rechten Blattes der Kurve $|z-1|\,|z+1| = 1$, dann besitzt trotzdem $\Phi(w)$ die Stelle $z = -1$ als singulären Punkt, mit Ausnahme desjenigen Falles, wo $F(z)$ eine gerade Funktion von z ist; denn, schliesst man diesen letzten Fall aus, so ist $\Phi(w)$ unstetig in jedem Punkte der negativen u-Axe, mit Ausnahme der Punkte der Strecke $-1 \cdots 0$, weil die substituierte Funktion daselbst unstetig ist. $\Phi(w)$ kann deshalb in eine nur innerhalb des Einheitskreises gleichmässig konvergente Potenzreihe

$$\Phi(w) = \Phi(0) + \frac{\Phi'(0)}{1!}\, w + \frac{\Phi''(0)}{2!}\, w^2 + \frac{\Phi'''(0)}{3!}\, w^3 + \cdots$$

entwickelt werden. Ist $F(z)$ eine gerade Funktion von z und ist z_0 ein singulärer Punkt von $F(z)$, so dass in dem rechten Teil der Cassinischen Kurve, die durch z_0 geht, kein weiterer singulärer Punkt liegt, und ist w_0 der Bildpunkt von z_0, so kann $\Phi(w)$ innerhalb des Kreises $|w| = |w_0|$ in eine gleichmässig konvergente Potenzreihe entwickelt werden, denn in diesem Falle ist $\Phi(w)$ stetig längs der negativen u-Axe im Innern des Kreises $|w| = |w_0|$. Konvergiert also die Reihe

$$\Phi(w) = \Phi(0) + \frac{\Phi'(0)}{1!}\, w + \frac{\Phi''(0)}{2!}\, w^2 + \frac{\Phi'''(0)}{3!}\, w^3 + \cdots$$

für $|w| < r$ und führt man darin die Substitution $w = z^2 - 1$ ein, so konvergiert die Reihe

$$\Phi(0) + \frac{\Phi'(0)}{1!}(z^2 - 1) + \frac{\Phi''(0)}{2!}(z^2 - 1)^2 + \frac{\Phi'''(0)}{3!}(z^2 - 1)^3 + \cdots \quad (29)$$

gleichmässig für alle z, die der Bedingung genügen

$$|z - 1|\ |z + 1| < r, \quad (30)$$

und stellt die Funktion $F(\sqrt{z^2})$ dar. Da aber nach der Definition des Ausdrucks (28) diejenige Bestimmung gilt, bei welcher der Winkel zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegt, deren Realteil somit positiv ist, so stellt die Reihe (29) die Funktion $F(z)$ nur in der rechten Halbebene dar und zwar nur für solche z, die noch der Bedingung (30) genügen. Man gelangt dadurch zu folgendem Ergebnis:

Ist $F(z)$ eine Funktion von z, die nicht gerade ist und die innerhalb dem rechten Blatte der Kurve $|z - 1|\ |z + 1| = 1$ mindestens einen singulären Punkt z_0 besitzt, aber innerhalb dem Oval einer Kurve $|z - 1|\ |z + 1| = r < 1$, das in der rechten Halbebene liegt, eindeutig, regulär und analytisch ist, dann gilt die polynomische Entwicklung

$$F(z) = \Phi(0) + \frac{\Phi'(0)}{1!}(z^2 - 1) + \frac{\Phi''(0)}{2!}(z^2 - 1)^2 + \frac{\Phi'''(0)}{3!}(z^2 - 1)^3 + \cdots, \quad (31)$$

welche gleichmässig gegen $F(z)$ konvergiert innerhalb des rechten Teiles der kleinsten Cassini'schen Kurve, die durch einen singulären

Punkt von $F(z)$ geht; ausserhalb dieses Gebietes divergiert sie. Liegen keine singulären Punkte von $F(z)$ im rechten Blatte der Lemniskate $|z-1|\,|z+1|=1$, so konvergiert die Darstellung (31) in diesem Blatte gleichmässig und divergiert ausserhalb in jedem Falle. Liegt in $F(z)$ eine gerade Funktion von z vor, so konvergiert die Darstellung (31) im ganzen Innern der kleinsten Cassinischen Kurve, die durch einen singulären Punkt von $F(z)$ geht.

Die rechte Seite von (31) ist eine gerade Funktion von z; konvergiert diese Reihe in dem Teile einer Cassinischen Kurve, der in der rechten Halbebene liegt, dann konvergiert sie auch im ganzen Innern dieser Kurve und stellt in zwei Punkten, die in bezug auf den Nullpunkt symmetrisch liegen, denselben Wert dar. Ist $F(z)$ eine gerade Funktion von z, so gilt deshalb die Darstellung (31) für das ganze Innere einer Cassini'schen Kurve; ist $F(z)$ eine beliebige, aber keine gerade Funktion, so stellt die Reihe (31) in den beiden Teilen der Kurve $|z-1|\,|z+1|\leq 1$ zwei verschiedene Funktionen dar, nämlich $F(z)$ und diejenige Funktion, die im Punkte $(-z)$ denselben Wert hat, wie $F(z)$ im Punkte z; diese Funktion ist $F(-z)$.

Die bisherige Entwicklung lässt sich verallgemeinern, indem man die Funktion

$$z=\sqrt[n]{1+w}=\sqrt[n]{\varrho}\,e^{i\frac{\vartheta}{n}} \tag{32}$$

betrachtet. Diese Funktion bildet dasjenige Blatt einer Lemniskate, deren n feste Punkte die Wurzeln der Gleichung $z^n-1=0$ sind, und welches zwischen den Winkeln $-\frac{\pi}{n}$ und $+\frac{\pi}{n}$ liegt, konform auf das Innere eines Kreises ab. Um dies einzusehen, kann man in ähnlicher Weise vorgehen, wie für den vorhin behandelten Fall $n=2$. Die Umkehrfunktion von (32) lautet

$$w=z^n-1.$$

Denkt man sich die rechte Seite in die n linearen Faktoren zerlegt, so erkennt man, dass für den Fall, dass sich w auf einem Kreis $|w|=r=konst.$ bewegt, sein Bildpunkt z sich auf einer solchen Kurve bewegt, dass für jeden Punkt dieser Kurve das

Produkt seiner n-Abstände, von den Punkten, die die n-Einheitswurzeln darstellen, konstant ist und deren Gleichung lautet

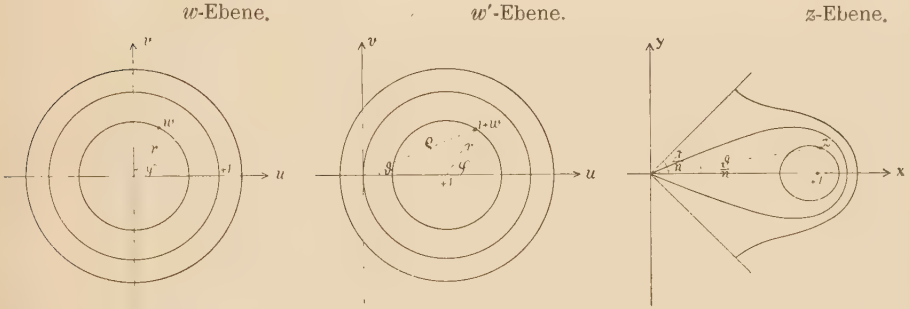
$$|z-1|\,|z-e^{\frac{2\pi}{n}i}|\,|z-e^{\frac{4\pi}{n}i}|\cdots|z-e^{\frac{2(n-1)}{n}\pi i}|=r \qquad (33)$$

Gehen wir aus von der Bewegung des Punktes w auf einem Kreise $|w|=r$, so sind wieder die drei Fälle gesondert zu betrachten, nämlich $r \gtreqless 1$.

1. Ist $r<1$ und durchläuft $w=r\,e^{i\varphi}$ den Kreis $|w|=r$ in positivem Sinn, indem φ von $-\pi$ zunächst bis 0 wächst, und setzt man

$$1+w=\varrho\,e^{i\vartheta},$$

so nimmt ϱ von einem Minimum fortwährend zu bis zu



Figur 8.

einem Maximum, das erreicht wird für $\varphi=0$, währenddem der Winkel ϑ von 0 bis zu einem Minimum $>-\frac{\pi}{2}$ abnimmt und dann dieselben Werte im entgegengesetzten Sinn bis 0 wieder durchläuft, es wird der absolute Betrag von z, $\sqrt[n]{\varrho}$, von einem Minimum stets zunehmen bis zu einem Maximum, währenddem der Winkel von z, $\frac{\vartheta}{n}$, von 0 bis zu einem Minimum $>-\frac{\pi}{2n}$ stetig abnimmt und dann wieder zunimmt bis 0. Genau symmetrisch sind die Verhältnisse für die obere Halbebene, wenn φ von 0 bis $+\pi$ zunimmt, dann nimmt $\sqrt[n]{\varrho}$ stetig ab bis zu einem Minimum, während der Winkel

$\frac{\vartheta}{n}$ von 0 an stetig zunimmt bis zu einem Maximum $< \frac{\pi}{2n}$ und dann wieder abnimmt bis 0. Das Ergebnis lässt sich folgendermassen aussprechen: Durchläuft der Punkt w einen Kreis $|w| = konst. < 1$ einmal vollständig und stets im selben Sinn, dann durchläuft der Bildpunkt z eine geschlossene Kurve, die den Punkt $+1$ einschliesst und im Winkelraum zwischen $-\frac{\pi}{2n}$ und $+\frac{\pi}{2n}$ liegt, einmal vollständig und stets in demselben Sinn.

2. Ist $r = 1$ und lässt man den Punkt w den Einheitskreis im positiven Sinn durchlaufen, indem φ von $-\pi$ an stetig wächst, so wird der absolute Betrag $\sqrt[n]{\varrho}$ des Bildpunktes z von 0 fortwährend zunehmen bis zu einem Maximum, das er erreicht, wenn der Winkel $\frac{\vartheta}{n}$, der von $-\frac{\pi}{2n}$ an stetig zunimmt, den Wert 0 erreicht. Da die Verhältnisse in der obern Halbebene symmetrisch sind, so hat man in diesem Fall folgendes Resultat: Durchläuft der Punkt w den Einheitskreis $|w| = 1$ stets im selben Sinn einmal vollständig, dann durchläuft der Bildpunkt z eine geschlossene Kurve, die den Punkt $+1$ einschliesst, die zwischen den Winkeln $-\frac{\pi}{2n}$ und $+\frac{\pi}{2n}$ liegt und die im Nullpunkt eine Spitze hat, einmal vollständig und zwar stets im selben Sinn.

3. Ist $r > 1$ und fixiert man die Bewegung des Punktes w auf einem Kreise $|w| = konst. > 1$, wobei φ von $-\pi$ an fortwährend stetig zunimmt, dann wächst der absolute Betrag des Bildpunktes z, $\sqrt[n]{\varrho}$, von einem Minimum fortwährend bis zu einem Maximalwert, den er erreicht, wenn der Winkel von z, $\frac{\vartheta}{n}$, der von $-\frac{\pi}{n}$ an stetig wächst, den Wert 0 annimmt; dann nimmt der absolute Betrag $\sqrt[n]{\varrho}$ wieder stetig ab und erreicht sein früheres Minimum wieder, wenn der Winkel $\frac{\vartheta}{n}$, der von 0 an stetig zunimmt, den Wert $+\frac{\pi}{n}$ erreicht. Wenn also der Punkt w einen Kreis $|w| = konst. > 1$ stets im selben Sinn einmal vollständig durchläuft, dann durchläuft der Bildpunkt z eine Kurve, die sich nicht schliesst, stets im selben

Sinn, und welche im Winkelraum zwischen den Strahlen $-\frac{\pi}{n}$ und $+\frac{\pi}{n}$ verläuft. Wenn der Punkt w die u-Axe im positiven Sinn überschreitet, dann springt der Bildpunkt z von einem Punkte des Strahles $+\frac{\pi}{n}$ zu einem Punkte des Strahles $-\frac{\pi}{n}$; somit ist die Funktion $z = \sqrt[n]{1+w}$ in allen Punkten der negativen u-Axe mit Ausnahme der Strecke $-1 \cdots 0$ unstetig.

Da $\frac{dz}{dw} = \frac{1}{n}(1+w)^{\frac{1}{n}-1}$ im Innern des Einheitskreises einen bestimmten endlichen von 0 verschiedenen Wert hat, so ist daselbst die Abbildung konform. Somit ergibt sich folgendes Endresultat:

Die Funktion $z = \sqrt[n]{1+w}$ bildet das Innere desjenigen Blattes der Lemniskate (33), das den Punkt $+1$ einschliesst und das Innere des Einheitskreises $|w| = 1$ ein-eindeutig und konform aufeinander ab; in den Punkten der negativen u-Axe mit Ausnahme der Punkte der Strecke $-1 \cdots 0$ ist sie unstetig.

Um die gesuchte polynomische Darstellung zu erhalten, bilden wir die Funktion

$$\Phi(w) = F\left(\sqrt[n]{1+w}\right),$$

wo $F(z)$ sich im Innern desjenigen Blattes der Lemniskate (33), das den Punkt $+1$ umschliesst, regulär verhält. Wir schliessen diejenigen Funktionen $F(z)$ von der Betrachtung aus, die in bezug auf eine Substitution $z = z \cdot e^{i\frac{2\pi}{n}}$ invariant sind. Dann wird jedenfalls $\Phi(w)$ längs der negativen u-Axe mit Ausnahme der Strecke $-1 \cdots 0$ unstetig sein; denn lässt man w auf einem Kreise $|w| = konst. > 1$ von oben gegen einen beliebigen Punkt der negativen u-Axe rücken, dann konvergiert der Wert von $F(z)$ gegen $F\left(\sqrt[n]{\varrho}\, e^{i\frac{\pi}{n}}\right)$; rückt dagegen w von unten gegen denselben Punkt, so konvergiert $F(z)$ gegen $F\left(\sqrt[n]{\varrho}\, e^{-i\frac{\pi}{n}}\right)$. Da aber wegen der Vor-

aussetzung $F(\sqrt[n]{\varrho}\, e^{i\frac{\pi}{n}}) = F(\sqrt[n]{\varrho}\, e^{-i\frac{\pi}{n}} e^{i\frac{2\pi}{n}})$ nicht denselben Wert haben kann wie $F(\sqrt[n]{\varrho}\, e^{-i\frac{\pi}{n}})$, so ist in diesem Punkte die Funktion $\Phi(w)$ unstetig. In diesem Fall lässt sich die Funktion $\Phi(w)$ in eine nur innerhalb dem Einheitskreise gleichmässig konvergente Potenzreihe entwickeln von der Form

$$\Phi(w) = \Phi(0) + \frac{\Phi'(0)}{1!} \cdot w + \frac{\Phi''(0)}{2!} \cdot w^2 + \frac{\Phi'''(0)}{3!} \cdot w^3 + \cdots ; \; |w| < 1.$$

Ersetzt man hierin w durch $z^n - 1$, so erhält man eine polynomische Entwicklung in z, die die Funktion $F(\sqrt[n]{z^n})$ darstellt für diejenigen z, für die $|z^n - 1| < 1$ ist. Auf Grund der frühern Definition der Wurzel kann man folgendes sagen: Die polynomische Reihe

$$\Phi(0) + \frac{\Phi'(0)}{1!}(z^n - 1) + \frac{\Phi''(0)}{2!}(z^n - 1)^2 + \frac{\Phi'''(0)}{3!}(z^n - 1)^3 + \cdots \quad (34)$$

stellt die Funktion $F(z)$ in dem Blatte der Lemniskate (33) dar, das den Punkt $+1$ einschliesst. Diese Reihe nimmt auch in entsprechenden Punkten der $(n-1)$ übrigen Blätter denselben Wert an. Man erkennt, dass sie in dem Blatte, das den Punkt $e^{+i\frac{2\pi}{n}}$ einschliesst, die Funktion $F_1(z) = F(z \cdot e^{-i\frac{2\pi}{n}})$ darstellt, in dem Blatte, das den Punkt $e^{-i\frac{2\pi}{n}}$ einschliesst, die Funktion $F_{-1} = F(z \cdot e^{+i\frac{2\pi}{n}})$ u. s. w.; allgemein wird die Reihe (34) in dem Blatte, das den Punkt $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ einschliesst, die Funktion $F_k(z) = F(z \cdot e^{-i\frac{2k\pi}{n}})$ darstellen.

Damit ist eine polynomische Reihe gewonnen, welche in n getrennt liegenden Gebieten, die hier in einfacher Art gewählt sind, n voneinander verschiedene Funktionen darstellt, die allerdings durch einfache Substitutionen auseinander hervorgehen.

Zum Schlusse sei noch erwähnt, dass man mit Hilfe der in den zwei letzten Paragraphen gegebenen Entwicklungen Reihen von der Form

$$F(z) = a_0 + a_1 \cdot P_1(z) + a_2 \cdot P_2(z) + \cdots + a_{-1} \cdot \frac{1}{P_1(z)} + a_{-2} \cdot \frac{1}{P_2(z)} + \cdots$$

angeben kann, die für ein ringförmiges Gebiet, in welchem sich die Funktion $F(z)$ regulär verhält, gültig sind und das Analogon zur Laurent'schen Reihe bilden.

Vita.

Ich, *Konrad Rieder,* von Basel, Sohn des Konrad Rieder, Primarlehrer in Basel, und dessen Frau Elisabeth geb. Frei, wurde am 13. Juni 1887 in Basel geboren. Nach Absolvierung der hiesigen Primarschule, der untern und obern Realschule bestand ich im Herbst 1906 die Maturitätsprüfung. Im Oktober 1906 erfolgte meine Immatrikulation an der Universität Basel, von welcher Zeit ab ich mich auf das Mittellehrerexamen vorbereitete, das ich im Sommer 1909 in Physik, Mathematik und Chemie bestand. Hernach widmete ich mich dem Studium der Mathematik. Die vorliegende Dissertation entstand auf Anregung und unter der Leitung von Herrn *Prof. Dr. R. Fueter* im Zeitraume vom Frühling 1910 bis Frühling 1911.

Während meiner Studienzeit besuchte ich die Vorlesungen, Uebungen und Praktika der Herren Professoren: Fr. Fichter, R. Flatt, R. Fueter, M. Grossmann, E. Hagenbach-Bischoff, A. Hagenbach, H. Kinkelin, A. Riggenbach, H. Rupe, O. Spiess, H. Veillon, K. Von der Mühll.

Allen diesen Herren sei für ihre Bemühungen mein herzlicher Dank ausgesprochen.